

Discrete Mathematics - Übungsblatt & Tutorium

Martina JUHNKE, Tarek EMMERICH, Germain POULLOT

April - July 2025

Jedes Übungsblatt enthält die Übungen (in der Regel Übungen 1 bis 4 und Bonusübung)

Ich (Germain) schreibe die Übungen auf Englisch und übersetze sie dann ins Deutsche (mit ChatGPT). Wenn du also das Gefühl hast, dass etwas seltsam ist oder fehlt, schau dir bitte die englische Version an.

Nicht alle Übungen sind korrigiert: für die verbleibenden sollten Sie zu den Mittwochssitzungen kommen!

Each exercise sheet contains the exercises of the Übungsblatt (usually exercises 1 to 4 and bonus exercise)

I (Germain) am writing the exercises in English and then doing the translation to German (with ChatGPT), so if you feel like something is weird or lacking, go to the English version, please.

Not all exercises are corrected: for the remaining one, you should come the the Wednesday' sessions!

Inhaltsverzeichnis

0	3
Übungsblatt 0	3
Loesungsblatt 0	7
1	10
Übungsblatt 1	10
Loesungsblatt 1	15
2	19
Übungsblatt 2	19
Loesungsblatt 2	24

3		30
	Übungblatt 3	30
	Loesungblatt 3	36
4		43
	Übungblatt 4	43
	Loesungblatt 4	49
5		56
	Übungblatt 5	56
	Loesungblatt 5	61
6		65
	Übungblatt 6	65
	Loesungblatt 6	69
7		73
	Übungblatt 7	73
	Loesungblatt 7	78
8		83
	Übungblatt 8	83
	Loesungblatt 8	88
9		95
	Übungblatt 9	95
	Loesungblatt 9	99
10		104
	Übungblatt 10	104
	Loesungblatt 10	109
11		114
	Übungblatt 11	114
	Loesungblatt 11	121
12		128
	Übungblatt 12	128
	Loesungblatt 12	132

Diskrete Mathematik – Sommersemester 2025

Übungsblatt 0

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden. Die Bonusübung kann bis zu +5 Bonuspunkte geben (daher sollte man sie nicht zu seiner Priorität machen).

Aufgabe 1

[Allgemeine Infos]

Um die Punkte zu erreichen, geben Sie ein Blatt an, mit dem Sie bestätigen, dass Sie die folgenden Infos gelesen und verstanden haben.

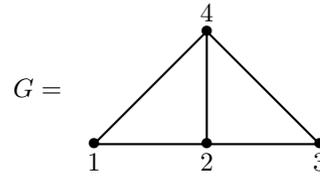
1. Die Vorlesung findet dienstags und donnerstags von 10 bis 12 Uhr in Raum 66/E33 statt.
2. Die Übung findet donnerstags von 12 bis 14 Uhr in Raum 69/117 statt. Die Lösungen zu den Übungsblättern werden in der Übungsstunde vorgestellt. Die erste Übungsstunde findet am 24.04.24 statt.
3. Die Übungsblätter werden wöchentlich am Dienstag veröffentlicht. Um zur Prüfung zugelassen zu werden, müssen Sie 50% der Punkte auf den Übungsblättern und Vips-Aufgaben erreichen (50% für jeden einzelnen von ihnen, nicht insgesamt!).
4. Übungsblätter müssen online über Vips eingereicht werden. Die Einreichung ist ab 10 Uhr am Dienstag eine Woche vor dem Abgabetermin (am folgenden Mittwoch um 11:59 Uhr) möglich. Übungsblätter können in Gruppen von bis zu drei Studierenden eingereicht werden. Melden Sie sich dazu in einer der Gruppen unter Vips → Groups an. Die Einsendung zählt, wenn eine Person aus der Gruppe die Aufgabe einreicht (im Zweifelsfall zählt die zuletzt hochgeladene Datei). Laden Sie die Lösungen vorzugsweise als pdf hoch, das mit LaTeX geschrieben wurde, oder andernfalls als jpg (z.B. wenn sie handgeschrieben sind). Korrekturen werden dann unter Vips → Results sichtbar sein.
5. Von einem Donnerstag zum nächsten müssen Sie einzeln eine kurze Aufgabenblock zu Vips beantworten (Zeitlimit: 90 Minuten).
6. Zusätzlich werden zwei Tutorien angeboten: Donnerstags von 14.00 bis 16.00 Uhr (in 15/E07) und freitags von 12.00 bis 14.00 Uhr (in 93/E31). Die Tutorien bieten zusätzliche Übungsaufgaben, die Ihnen bei der Bearbeitung der Übungsblätter helfen. Sie können in den Tutorien auch Fragen zu den Übungsblättern stellen. Die Tutorien sind ein optionales Zusatzangebot. Wenn Sie lieber englisch/français/español sprechen, kommen Sie bitte donnerstags.

Aufgabe 2

[Adjazenzmatrix und Pfade]

Berechne die Adjazenzmatrix A des hier dargestellten Graphen G .

Berechne A^2 und A^3 . Zeige, dass der Eintrag in Zeile i und Spalte j von A^2 (bzw. A^3) der Anzahl der Pfade der Länge 2 (bzw. 3) zwischen i und j entspricht.



Aufgabe 3

[Graph von Graphen]

Zeichne den Graphen \mathcal{G}_3 mit:

- Knoten: alle Graphen mit genau 3 Knoten,
- Kanten: es gibt eine Kante zwischen einem Graphen G und einem Graphen H , wenn G ein Teilgraph von H ist (oder umgekehrt).

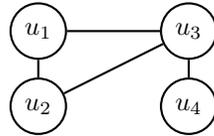
Wie viele Knoten hat \mathcal{G}_3 ? Wie viele Kanten hat \mathcal{G}_3 ? Gibt es einen Teilgraphen von \mathcal{G}_3 , der ein Kreis ist und alle seine Knoten enthält?

Aufgabe 4

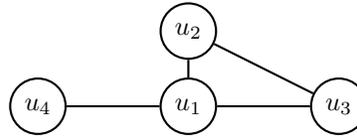
[Graphisomorphismen]

Entscheiden Sie, ob folgende Graphen isomorph sind.

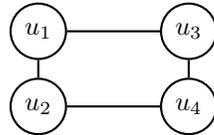
1.



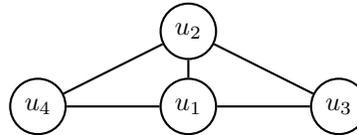
und



2.



und



Falls ja, geben Sie einen Graphisomorphismus an.

Falls nein, begründen Sie warum nicht.

Aufgabe 5

[Bonusaufgabe – Ein Wikipedia-Spiel]

Betrachte den Graphen, dessen Knoten alle (deutsches) Wikipedia-Seiten sind und dessen Kanten zwischen zwei Seiten existieren, wenn es einen Link von einer Seite zur anderen gibt (Sie können auf ein blaues Wort auf einer Seite klicken, um auf die andere Seite zu gelangen). Wie groß ist in diesem Graphen der Abstand zwischen der Seite “Graph (Graphentheorie)” und der Seite “Teddybär”?

Abgabe: 23.04.2025 bis 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):

“ Seien $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^2$ n Punkte, und definiere einen Graphen G , wobei $\{p_i, p_j\}$ eine Kante ist, falls entweder p_j der nächstgelegene Punkt zu p_i ist oder umgekehrt.

Die minimale Anzahl an (ungerichteten) Kanten in G ist $\boxed{n-1}$.

Beispiel: Wenn alle p_i ($i \geq 2$) am nächsten zu einem zentralen Punkt p_1 liegen und p_1 genau einen nächstgelegenen Nachbarn unter ihnen hat, dann trägt jedes Paar höchstens eine Kante bei, was insgesamt $n-1$ Kanten ergibt.
”

Das ist falsch, erklären Sie mir, warum.

Aufgabe 7

[Zeichnen einiger Graphen]

Wenn möglich, zeichne jeden der folgenden Graphen, schätze die Anzahl der Knoten, Kanten, zusammenhängenden Komponenten usw. ab und entscheide, ob es sich um einen Baum handelt oder nicht. Einige Graphen sind nicht richtig definiert, das ist beabsichtigt: Du musst herausfinden, welchen Graphen der Autor definieren wollte.

1. Knoten: alle Länder in der Europäischen Union; Kanten: zwischen zwei Ländern, die eine Grenze teilen (verwende eine Karte aus dem Internet).
2. Knoten: alle Räume an der Universität; Kanten: zwischen Räumen, die eine Tür teilen.
3. Knoten: n Punkte $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ in der Ebene (keiner von ihnen ist equidistant zu zwei anderen); Kanten: $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$, wenn j der Index ist, der $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k\|$ für $k \neq i$ minimiert.
4. Knoten: Zahlen von 0 bis 16; Kanten: (x, y) , wenn x y teilt, und es kein z gibt, sodass x z und z y teilt.
5. Knoten: alle Graphen mit 4 Knoten; Kanten: (G, H) , wenn H ein Teilgraph von G ist.
6. Knoten: Paare (Buchstabe des Alphabets, Zahl); Kanten: zwischen (X, i) und (Y, j) , wenn $j = i + 1$ und es ein Wort (im deutschen Wörterbuch) mit dem Buchstaben X an der i -ten Position und dem Buchstaben Y an der j -ten Position gibt (zeichne es für ein kleines Wörterbuch).
7. Knoten: alle bewiesenen mathematischen Sätze (oder alle Mathematik-kurse, die du während deines Lebens besucht hast); Kanten: von einem Satz zu einem anderen, wenn der zweite den ersten zur Beweisführung verwendet.

8. Knoten: alle Mathematiktutoriumssitzungen, die in diesem Semester stattfinden; Kanten: zwischen Sitzungen, deren Zeitpläne sich überschneiden (*zeige, dass alle Zyklen der Länge $k \geq 4$ eine Sehne haben, d.h. zwei nicht benachbarte Knoten im Zyklus, die eine Kante teilen*).
9. Knoten: alle Wikipedia-Seiten; Kanten: zwischen zwei Seiten, wenn es einen Link von einer Seite zur anderen gibt.
10. Knoten: alle Teile eines IKEA-Möbels; Kanten: zwischen zwei Teilen, wenn man einen Teil an den anderen befestigen muss, wenn man das Möbelstück montiert.

Aufgabe 8

[Zu viele Kanten erzwingen Zusammenhang]

Sei G ein Graph mit n Knoten und (streng) mehr als $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ Kanten. Zeigen Sie, dass G zusammenhängend ist.

Aufgabe 9

[Komplementgraph und Zusammenhang]

Für einen Graphen $G = (V, E)$ sei sein Komplementgraph definiert als $\overline{G} = (V, \overline{E})$, wobei eine Kante uv in \overline{G} genau dann existiert, wenn es in G keine Kante uv gibt.

Ist G nicht zusammenhängend, so zeigen Sie, dass \overline{G} zusammenhängend ist.

Discrete Mathematics – Loesungblatt 0

Aufgabe 1

[Allgemeine Informationen]

Gut gemacht, du kannst lesen!

Aufgabe 2

[Adjazenzmatrix und Wege]

Die Adjazenzmatrix des Graphen G ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

in Zeile i und Spalte j steht eine 1, falls es eine Kante ij im Graphen gibt, sonst eine 0.

Wir haben:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Der Leser erkennt leicht, dass es 5 Wege der Länge 3 (d. h. mit 3 Kanten und 4 Knoten) vom Knoten 1 zum Knoten 2 in G gibt: $(1, 4, 3, 2)$, $(1, 2, 3, 2)$, $(1, 2, 4, 2)$, $(1, 4, 1, 2)$, $(1, 2, 1, 2)$.

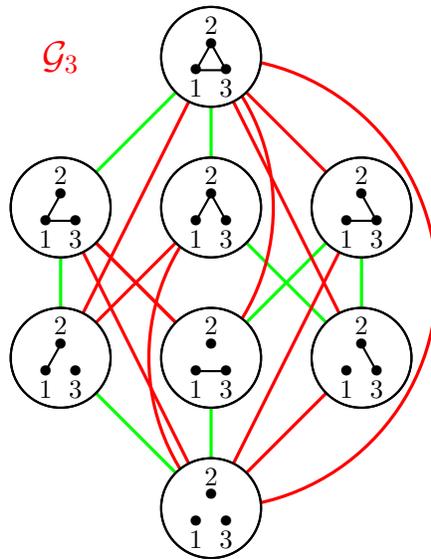
Dasselbe gilt für alle anderen Einträge von A^2 und A^3 .

Beachten Sie jedoch, dass wir hier nicht wirklich “Pfade” zählen, sondern vielmehr “Wege”: Ein Pfad darf jede Kante nur einmal benutzen, wohingegen ein Weg eine Kante mehrfach verwenden darf. Das Problem beim Potenzieren der Adjazenzmatrix ist, dass wir damit nicht die Anzahl der Pfade erhalten, sondern nur die Anzahl der Wege (was in der Regel weniger interessant ist).

Aufgabe 3

[Graph auf Graphen]

In \mathcal{G}_3 gibt es 8 Knoten und 19 Kanten. Es gibt einen Zyklus in \mathcal{G}_3 , der alle Knoten enthält; wir zeichnen ihn in der Abbildung in grün ein.



Aufgabe 4 [Graphenisomorphismus]

1. Diese Graphen sind isomorph, über die Abbildung $u_1 \mapsto u_3, u_2 \mapsto u_2, u_3 \mapsto u_1, u_4 \mapsto u_4$.

2. Diese beiden Graphen sind nicht isomorph: sie haben nicht die gleiche Anzahl an Kanten.

Aufgabe 5 [Bonus – Ein Wikipedia-Spiel]

Die Länge beträgt 4 (oder weniger):

Graph (Graphentheorie) \rightarrow U-Bahn \rightarrow Berlin \rightarrow Bären \rightarrow Teddybär
 Wenn du einen anderen Pfad gefunden hast, der nicht “zu lang” ist, freu dich!

Aufgabe 6 [Mit ChatGPT]

Das Minimum ist $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, nicht $n - 1$. Tatsächlich (wir behandeln nur den Fall, dass n gerade ist): Betrachte die Punkte $(0, 0), (1, 0), (2, 0), (2, 1), (4, 0), (4, 1), \dots, (2n, 0), (2n, 1)$. Dann sind die Kanten des resultierenden Graphen jeweils zwischen $(2i, 0)$ und $(2i, 1)$. Es gibt n Kanten, aber $2n$ Knoten, also ist die Anzahl der Kanten die Hälfte der Anzahl der Knoten.

Aufgabe 7 [Einige Graphen zeichnen]

Aufgabe 8 [Zu viele Kanten erzwingen Zusammenhang]

Erinnere dich: Die maximale Anzahl an Kanten eines Graphen mit n Knoten ist $\binom{n}{2}$ (die Anzahl der Kanten des vollständigen Graphen).

Angenommen, G ist nicht zusammenhängend. Dann existieren $A, B \subsetneq V$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = V$, sodass es keine Kante in G zwischen einem Knoten in A und einem in B gibt. Sei $|A| = a$ und $|B| = b$ mit $a + b = n$ und $1 \leq a, b \leq n - 1$.

Insbesondere ist die Anzahl der Kanten in G höchstens:

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} = \frac{1}{2}(a(a-1) + b(b-1)) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - (a+b))$$

Dieser Ausdruck wird maximiert bei $a = n - 1$ und $b = 1$ (oder umgekehrt), was ein Maximum von $\binom{n-1}{2}$ ergibt.

Daher haben wir gezeigt: Wenn G strikt mehr als $\binom{n-1}{2}$ Kanten hat, dann ist G zusammenhängend.

Aufgabe 9

[Komplementgraph und Zusammenhang]

Sei $G = (V, E)$ ein nicht zusammenhängender Graph. Dann existieren $A, B \subsetneq V$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = V$, sodass es keine Kante in G zwischen einem Knoten in A und einem in B gibt.

Daraus folgt: Für $x \in A$ und $y \in B$ existiert eine Kante in \overline{G} . Somit enthält \overline{G} einen zusammenhängenden Teilgraphen auf allen seinen Knoten: den Graphen $(A \cup B, \{(x, y) ; x \in A, y \in B\})$ (dieser Graph heißt der vollständige bipartite Graph über A und B).

Diskrete Mathematik – Sommersemester 2025

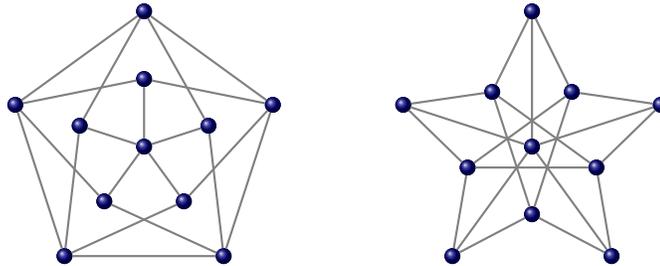
Übungsblatt 1

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden. Die Bonusübung kann bis zu +5 Bonuspunkte geben (daher sollte man sie nicht zu seiner Priorität machen).

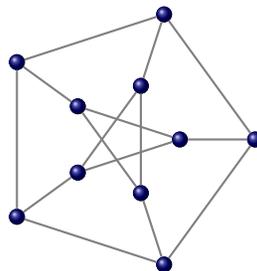
Aufgabe 1

[Isomorphie von Graphen]

- (i) Entscheiden Sie, ob die folgenden beiden Graphen isomorph sind. Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls einen Isomorphismus an.



- (ii) Zeigen Sie, dass der Graph in der unteren Abbildung isomorph ist zu dem Graphen, dessen Knoten alle Paare von Zahlen der Form $\{i, j\}$ sind, wobei $1 \leq i \leq 5$, $1 \leq j \leq 5$ gilt; und wobei zwei solche Knoten $\{i, j\}$ und $\{k, l\}$ genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$.



Aufgabe 2

[Bäume]

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für einen nicht-leeren Graph $G = (V, E)$ äquivalent sind:

- (i) G ist ein Baum.
- (ii) G ist *minimal zusammenhängend*, d.h. G ist zusammenhängend und für jede Kante $e \in E$ ist $G \setminus e := (V(G), E(G) \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend.
- (iii) G ist *maximal kreisfrei*, d.h. G besitzt keine Kreise und für je zwei nicht adjazente Knoten u und v in V enthält $G + uv := (V, E \cup \{uv\})$ einen Kreis.

Aufgabe 3

[Zentrum von Bäumen]

Ein Knoten $u \in V$ ist ein *Zentrum* eines Graphen $G = (V, E)$, wenn $\max\{\text{dist}(u, v) ; v \in V\}$ so klein wie möglich ist.

- (i) Sei T ein Baum mit mindestens 3 Knoten und T' der Baum, der durch Löschen jedes Blattes von T erhalten wird. Zeigen Sie, dass T und T' dieselben Zentren haben.
- (ii) Folgern Sie, dass ein Baum entweder ein einziges Zentrum oder zwei benachbarte Zentren hat.
- (iii) Geben Sie einen Graphen mit n Knoten und n Zentren an.

Aufgabe 4

[Spannbäume]

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, T ein Spannbaum in G und C ein Kreis in G .

- (i) Sei $e \in E(T) \cap E(C)$ eine Kante. Zeigen Sie, dass eine Kante $f \in E(C) \setminus \{e\}$ existiert, sodass $(T \setminus e) + f$ ein Spannbaum ist.
- (ii) Sei T' ein weiterer Spannbaum in G und sei $e \in E(T) \setminus E(T')$ eine Kante. Zeigen Sie, dass eine Kante $f \in E(T')$ existiert, sodass $(T \setminus e) + f$ ein Spannbaum ist.

Aufgabe 5

[Bonusaufgabe – Chemie]

Zeigen Sie, dass die graphische Darstellung von Alkanen (Kohlenwasserstoffen) der Formel $C_n H_{2n+2}$ ein Baum ist (denken Sie daran, dass das Kohlenstoffatom eine Wertigkeit von 4 und das Wasserstoffatom eine Wertigkeit von 1 hat).

Für n von 3 bis 6, wie viele verschiedene Isomere der Formel $C_n H_{2n+2}$ gibt es? Zeichnen Sie sie. Denken Sie daran, dass zwei Moleküle Isomere sind, wenn sie dieselbe Formel, aber nicht dieselbe grafische Darstellung haben (Kohlenstoffatome sind untereinander nicht unterscheidbar, ebenso wie Wasserstoffatome).

Abgabe: bis 30.04.2025 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):

“ Um die maximale Anzahl an Zyklen in einem einfachen Graphen mit n Knoten und $n+1$ Kanten zu maximieren, betrachten wir folgende Konstruktion:

Nehmen Sie den vollständigen Graphen K_{n-1} , der $\binom{n-1}{2}$ Kanten hat und eine große Anzahl an Zyklen enthält. Fügen Sie dann einen neuen Knoten hinzu und verbinden Sie ihn mit genau zwei der bestehenden Knoten in K_{n-1} .

Dies ergibt einen Graphen mit:

- n Knoten,
- $n + 1 = \binom{n-1}{2} + 2$ Kanten,
- und mindestens $\binom{n-1}{2}$ verschiedenen Zyklen, die alle bereits in K_{n-1} vorhanden sind.

Daher ist die maximale Anzahl an Zyklen in einem einfachen Graphen mit n Knoten und $n + 1$ Kanten: $\boxed{\binom{n-1}{2}}$. ”

Das ist falsch, erklären Sie mir, warum. Was ist die maximale Anzahl an Zyklen in einem Graphen mit n Knoten und $n + 1$?

Aufgabe 7

[Zeichnen einiger Graphen]

(Abgeschrieben von Tutorium 0, Aufgabe 7)

Wenn möglich, zeichne jeden der folgenden Graphen, schätze die Anzahl der Knoten, Kanten, zusammenhängenden Komponenten usw. ab und entscheide, ob es sich um einen Baum handelt oder nicht. Einige Graphen sind nicht richtig definiert, das ist beabsichtigt: Du musst herausfinden, welchen Graphen der Autor definieren wollte.

1. Knoten: alle Länder in der Europäischen Union; Kanten: zwischen zwei Ländern, die eine Grenze teilen (verwende eine Karte aus dem Internet).
2. Knoten: alle Räume an der Universität; Kanten: zwischen Räumen, die eine Tür teilen.
3. Knoten: n Punkte $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ in der Ebene (keiner von ihnen ist equidistant zu zwei anderen); Kanten: $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$, wenn j der Index ist, der $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k\|$ für $k \neq i$ minimiert.
4. Knoten: Zahlen von 0 bis 16; Kanten: (x, y) , wenn x y teilt, und es kein z gibt, sodass x z und z y teilt.
5. Knoten: alle Graphen mit 4 Knoten; Kanten: (G, H) , wenn H ein Teilgraph von G ist.

6. Knoten: Paare (Buchstabe des Alphabets, Zahl); Kanten: zwischen (X, i) und (Y, j) , wenn $j = i + 1$ und es ein Wort (im deutschen Wörterbuch) mit dem Buchstaben X an der i -ten Position und dem Buchstaben Y an der j -ten Position gibt (zeichne es für ein kleines Wörterbuch).
7. Knoten: alle bewiesenen mathematischen Sätze (oder alle Mathematik-kurse, die du während deines Lebens besucht hast); Kanten: von einem Satz zu einem anderen, wenn der zweite den ersten zur Beweisführung verwendet.
8. Knoten: alle Mathematik-tutoriumssitzungen, die in diesem Semester stattfinden; Kanten: zwischen Sitzungen, deren Zeitpläne sich überschneiden (zeige, dass alle Zyklen der Länge $k \geq 4$ eine Sehne haben, d.h. zwei nicht benachbarte Knoten im Zyklus, die eine Kante teilen).
9. Knoten: alle Wikipedia-Seiten; Kanten: zwischen zwei Seiten, wenn es einen Link von einer Seite zur anderen gibt.
10. Knoten: alle Teile eines IKEA-Möbels; Kanten: zwischen zwei Teilen, wenn man einen Teil an den anderen befestigen muss, wenn man das Möbelstück montiert.

Aufgabe 8

[Übung zu Bäumen]

- (i) Zeige, dass das Zusammenziehen einer Kante eines Baumes einen Baum ergibt. Zeige, dass das Löschen eines Blattes eines Baumes einen Baum ergibt.
- (ii) Zeige, dass ein Baum 2-färbbar ist (d. h. mit Schwarz und Weiß gefärbt werden kann, sodass keine zwei benachbarten Knoten dieselbe Farbe erhalten).
- (iii) Zeige, dass zwischen zwei Knoten eines Baumes ein eindeutiger Pfad existiert.

Aufgabe 9

[Eindeutigkeit des minimalen Spannbaums]

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Gewichtsfunktion. Wir möchten beweisen: *Wenn $\omega(e) \neq \omega(f)$ für alle Kanten $e \neq f$ gilt, dann hat G einen minimalen Spannbaum; außerdem enthält dieser Baum die Kante mit dem kleinsten Gewicht.*

- (i) Fixieren Sie einen Spannbaum T von G und eine Kante e , die nicht in T enthalten ist. Welche Kanten können von $T \cup \{e\}$ gelöscht werden, um einen Spannbaum von G zu erhalten (siehe Aufgabe 4)?
- (ii) Schlussfolgern Sie, dass ein minimaler Spannbaum immer die kleinste Kante enthält.

- (iii) Angenommen, es gibt zwei minimale Spann­b­ume T_1 und T_2 von G . Betrachten Sie die Kante e mit minimalem Gewicht, die in T_1 enthalten ist, aber nicht in T_2 , oder in T_2 , aber nicht in T_1 . Angenommen, e ist in T_1 . Konstruieren Sie einen Spannbaum von G mit einem geringeren Gewicht.
- (iv) Ziehen Sie Schlussfolgerungen ­uber die Eindeutigkeit des minimalen Spannbaums.

Aufgabe 10

[Pr­uferfolgen]

Betrachte einen Baum T mit Knoten, die von 1 bis n nummeriert sind. Die *Pr­uferfolge* p_T ist eine Folge von n Zahlen in $\{1, \dots, n\}$, die mit T assoziiert ist und induktiv erhalten wird. Sei i das Blatt von T mit der minimalen Nummer, $T \setminus i$ der Baum, der aus T durch Entfernen von i entsteht, und j_i der eindeutige Nachbar von i in T , dann gilt: $p_T = j \cup p_{T \setminus i}$.

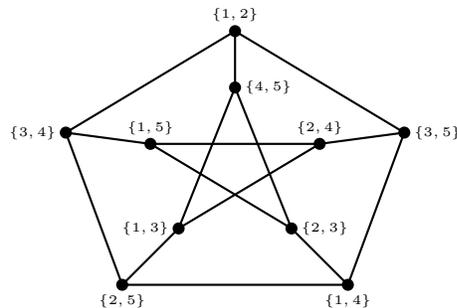
- (i) Schreibe die Pr­uferfolgen f­ur alle beschrifteten B­aume bis zu 4 Knoten auf.
- (ii) Zeige, dass $T \mapsto p_T$ injektiv ist. Zeige, dass $T \mapsto p_T$ surjektiv ist (auf welcher Menge?). (Hinweis: Konstruiere eine Umkehrfunktion von $T \mapsto p_T$.)
- (iii) Wie viele beschriftete B­aume mit n Knoten gibt es?

Discrete Mathematics – Loesungblatt 1

Aufgabe 1

[Isomorphie von Graphen]

- (i) Ja, sie sind isomorph.
- (ii) Wir geben im folgenden ein Labeling des Petersen Graphen an, aus dem direkt ersichtlich ist, dass er isomorph zu dem Graphen mit der Eckenmenge $\binom{\{1, \dots, 5\}}{2}$ ist, wobei zwei solcher Ecken $\{i, j\}, \{k, l\}$ genau dann eine Kante bilden, wenn $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$.



Aufgabe 2

[Bäume]

(i) \Rightarrow (ii): Da G ein Baum ist, ergibt sich direkt der Zusammenhang von G . Wir zeigen nun, dass $G \setminus e$ nicht zusammenhängend ist für jede Kante $e \in E(G)$. Angenommen es existiert $e = vw \in E(G)$, sodass $G - e$ zusammenhängend ist. Dann existiert ein v - w -Weg P in $G \setminus e$. P ergänzt durch die Kante e wäre dann ein Kreis in G , was einen Widerspruch dazu liefert, dass G ein Baum und insbesondere kreisfrei ist.

(ii) \Rightarrow (i): Da G nach Voraussetzung zusammenhängend ist, müssen wir nur zeigen, dass G keine Kreise enthält. Hätte G einen Kreis C , so wäre $G \setminus e$ zusammenhängend für jede Kante $e \in E(C)$, was einen Widerspruch zur Voraussetzung wäre.

(i) \Rightarrow (iii): Da G ein Baum ist, wissen wir bereits, dass G kreisfrei ist. Seien nun $u, v \in V(G)$, sodass $uv \notin E(G)$. Da G zusammenhängend ist, existiert ein u - v -Weg $P = uu_1 \dots u_{s-1}v$ in G . Dann ist $uu_1 \dots u_{s-1}vu$ ein Kreis in $G \cup uv$.

(iii) \Rightarrow (i): Da G nach Voraussetzung keine Kreise enthält, reicht es zu zeigen, dass G zusammenhängend ist. Seien $u, v \in V(G)$. Ist $uv \in E(G)$, so ist uv bereits ein u - v -Weg. Ist $uv \notin E(G)$, so enthält $G' = (V, E \cup uv)$ einen Kreis

$$uu_1 \dots u_{s-1}vu.$$

In diesem Fall ist $uu_1 \dots u_{s-1}v$ ein u - v -Weg in G .

Aufgabe 3

[Zentrum von Bäumen]

Für $u \in V$ bezeichnen wir mit $\delta_T(u) = \max_{v \in V} \text{dist}(u, v)$. Beachten Sie, dass $\delta_T(u) \geq 1$, da es mindestens 2 verschiedene Knoten in T gibt.

Wenn u ein Blatt von T ist, bezeichnen wir mit v_u^T seinen eindeutigen Nachbarn in T . Für ein Blatt u von T gilt dann $\text{dist}(v_u^T, w) = \text{dist}(u, w) - 1$ für $w \neq u$ (und $\text{dist}(v_u^T, u) = 1$), also $\delta_T(v_u^T) = \delta_T(u) - 1$.

Darüber hinaus wird $\delta_T(u)$ auf einem Blatt von T erreicht: Dies trifft auf den Baum mit 3 Knoten zu, und wenn dies auf T' zutrifft, dann auch auf T , denn für alle $w \in T$ und ein Blatt u von T gilt $\text{dist}(w, u) = \text{dist}(w, v_u^T) + 1$, wobei v_u^T ein Blatt von T' ist.

- (i) Zunächst, wenn u ein Zentrum von T ist, dann ist es kein Blatt von T , denn wenn u ein Blatt ist, dann gilt $\delta_T(v_u^T) < \delta_T(u)$. Außerdem, betrachten wir einen beliebigen Knoten w von T , der kein Blatt ist: $\delta_T(w) = \text{dist}(w, u)$ für ein Blatt u von T , also ist $\text{dist}(w, v_u^T) = \delta_T(w) - 1$ das Maximum von $\text{dist}(w, v)$ für $v \in T'$, d.h. $\delta_{T'}(w) = \delta_T(w) - 1$. Folglich sind die Minimierer von δ_T und $\delta_{T'}$ dieselben: T und T' haben die gleichen Zentren.
- (ii) Wir führen eine Induktion über die Anzahl der Knoten von T durch. Wenn T einen Knoten hat, hat es ein einziges Zentrum. Wenn T 2 Knoten hat, dann sind beide Zentren, und sie sind benachbart. Wenn T 3 oder mehr Knoten hat, dann hat T die gleichen Zentren wie T' (erhalten aus T , indem alle seine Blätter entfernt werden): Da T' streng weniger Knoten hat, hat T' 1 Zentrum oder 2 benachbarte Zentren, und die Induktion ist abgeschlossen.

Aufgabe 4

[Spannbäume]

- $T \setminus e$ ist nicht zusammenhängend. Sei $e = vw$. Da C ein Kreis ist, existiert ein Pfad P von v nach w in $C \setminus e$. Seien A und B die Zusammenhangskomponenten von $T \setminus e$. Da T ein Spannbaum ist, existiert eine Kante $f = xy \in E(P)$, mit $x \in V(A)$ und $y \in V(B)$. Hinzufügen von f zu $T \setminus e$ gibt einen Spannbaum, weil $(T \setminus e) + f$ minimal zusammenhängend und aufspannend ist.
- Sei $e = vw$. Da T' ein Spannbaum ist, existiert ein Pfad $P \subseteq T'$ von v nach w . $P + e$ ist ein Kreis. Die Behauptung folgt aus (i).

Aufgabe 5

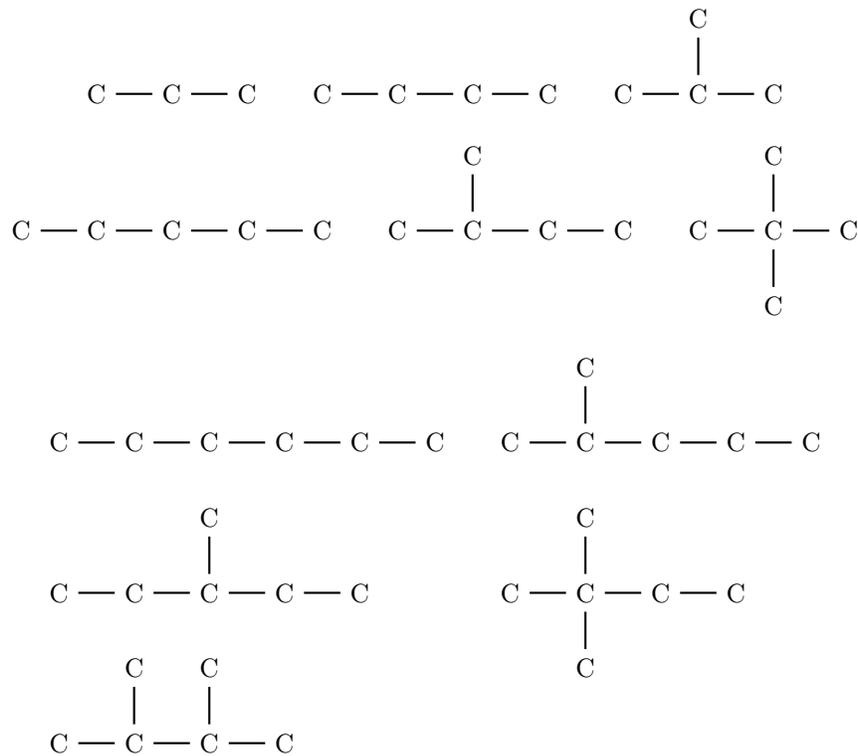
[Bonus – Chemie]

Betrachten wir den Graphen $G = (V, E)$, dessen Knoten die Atome des Moleküls C_nH_{2n+2} sind, und dessen Kanten die Bindungen zwischen den Atomen darstellen. Dieser Graph hat $n + (2n + 2) = 3n + 1$ Knoten, wobei es n Knoten vom Grad 4 und $2n + 2$ Knoten vom Grad 1 gibt. Die Gradformel besagt, dass $2 \#E = 4 \times n + 1 \times (2n + 2) = 6n + 2$. Daher ist $\#E = 3n + 1 = \#V - 1$. Da dies der Graph eines Moleküls ist, ist er zusammenhängend, also ein Baum. Es

ist unmöglich, dass es eine Doppelbindung zwischen Kohlenstoffatomen gibt, da dies die Konnektivität des Moleküls unterbrechen würde.

Da Wasserstoffatome nicht unterscheidbar sind und Kohlenstoffatome nicht unterscheidbar sind, können wir ein Molekül einfach durch seine Kohlenstoffatome darstellen. Wir können all diese Bäume konstruieren, indem wir die Kohlenstoffatome nacheinander hinzufügen:

- Für $n = 3$ gibt es 1 Baum.
- Für $n = 4$ gibt es 2 Bäume.
- Für $n = 5$ gibt es 3 Bäume.
- Für $n = 6$ gibt es 5 Bäume.



Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

Die maximale Anzahl an Zyklen in einem Graphen mit n Knoten und $n + 1$ Kanten ist 3. Der Beweis bleibt dem Leser als Übung überlassen.

Aufgabe 7

[Zeichnen einiger Graphen]

Aufgabe 8

[Übung zu Bäumen]

Ein Baum ist ein zusammenhängender Graph mit einem Kanten weniger als Knoten.

- (i) Durch Kontraktion entsteht ein zusammenhängender Graph, und die Anzahl der Kanten ist immer noch um 1 weniger als die Anzahl der Knoten. Löschen eines Blattes verringert die Anzahl der Knoten um 1 und die Anzahl der Kanten auch um 1, und die Konnektivität bleibt erhalten.
- (ii) Angenommen, alle Bäume mit n Knoten sind 2-färbbar (dies trifft für $n = 1$ und $n = 2$ zu). Nehmen Sie einen Baum T mit $n + 1$ Knoten, entfernen Sie ein Blatt v , 2-färben Sie den resultierenden Baum. In T hat das Blatt v nur einen Nachbarn u : Färben Sie v in der entgegengesetzten Farbe von u , um eine 2-Färbung von T zu erhalten. Durch Induktion sind alle Bäume 2-färbbar.
- (iii) Dasselbe gilt: Dies trifft für Bäume mit $n = 1$ und $n = 2$ Knoten zu. Wenn dies für alle Bäume mit n Knoten gilt, nehmen Sie T mit $n + 1$ Knoten, entfernen Sie ein Blatt v , um T' zu erhalten. Seien u, u' Knoten von T . Wenn u, u' Knoten von T' sind, gibt es einen eindeutigen Pfad zwischen ihnen (durch Induktion), sonst ist $u = v$, und lassen Sie \bar{v} der eindeutige Nachbar von u in T sein. Alle Pfade zwischen v und u' geben einen Pfad zwischen \bar{v} und u' , und wir wissen, dass es einen solchen eindeutigen Pfad gibt. Daher gibt es einen eindeutigen Pfad zwischen v und u' .

Aufgabe 9

[Eindeutigkeit des minimalen Spannbaums]

- (i)
- (ii) Angenommen, der minimale Spannbaum T enthält nicht die minimale Kante e . Dann enthält $T + e$ einen Zyklus C , und daher gibt es einen anderen Spannbaum $T' = (T \setminus f) + e$ für ein $f \neq e$, eine Kante von T . Da das Gewicht von T' $\omega(T) + \omega(e) - \omega(f) < \omega(T)$ ist (weil $\omega(e)$ minimal ist), haben wir einen Widerspruch.
- (iii) Betrachten Sie $T_2 + e$: Es hat einen Zyklus C , sodass wir eine Kante $e_2 \neq e$ aus T_2 entfernen können, sodass $T' = (T_2 \setminus e_2) + e$ wieder ein Baum ist. Es spannt G ab, und $\omega(T') = \omega(T_2) + \omega(e) - \omega(e_2) < \omega(T_2)$ nach Annahme über e .
- (iv) Wenn es zwei verschiedene minimale Spannbäume T_1 und T_2 gibt, dann ermöglicht die vorherige Fragestellung die Konstruktion von T' mit $\omega(T') < \omega(T_2)$, was der Minimalität von T_2 widerspricht. Folglich kann es nicht zwei verschiedene minimale Spannbäume geben.

Aufgabe 10

[Prüferfolgen]

Diskrete Mathematik – Sommersemester 2025

Übungsblatt 2

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden. Die Bonusübung kann bis zu +5 Bonuspunkte geben (daher sollte man sie nicht zu seiner Priorität machen).

- Aufgabe 1** [3-reguläre Graphen]
 Sei $G = (V, E)$ ein 3-regulär Graph (d.h. jeder Knoten hat genau 3 Nachbarn).
 (i) Beweisen Sie, dass $\#V$ gerade ist.
 (ii) Konstruieren Sie für $p \geq 2$ explizit einen 3-regulären Graphen $G = (V, E)$ mit $\#V = 2p$. (Tipp: Für $p \geq 3$, denken bipartite.)

- Aufgabe 2** [Gitter, bicycle-wheels, vollständigen k -partiten Graphen]
 Die *Tailenweite* eines Graphen G ist die Länge eines kürzesten Kreises in G . Der *Durchmesser* eines Graphen G ist die maximale Länge eines kürzesten Weges in G . Bestimmen Sie Kantenzahl, Maximalgrad, Durchschnittsgrad, Tailenweite und Durchmesser der folgenden Graphen:
 (i) [Gitter] Sei $G_{n,m} = (V, E)$ mit $V = \{(i, j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ und $E = \{(v, w), (v', w')\} \mid |v - v'| + |w - w'| = 1\}$.
 (ii) [Bicycle-wheel] Sei $BW_k = (V, E)$ mit $V = \{a, b, c_1, \dots, c_k\}$ und (Figure 1) $E = \{ab\} \cup \{ac_i, bc_i \mid i \in [k]\} \cup \{c_1c_2, \dots, c_{k-1}c_k, c_kc_1\}$.
 (iii) [Vollständigen k -partiten Graphen] Sei $K_{n_1, \dots, n_k} = (V, E)$ gegeben durch $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$ mit $\#V_i = n_i$ und $E = \{vw \mid v \in V_i, w \in V_j \text{ mit } i \neq j\}$.
 $A \cup B$ ist die *disjunkte Vereinigung*, das bedeutet $A \cup B$ mit $A \cap B = \emptyset$.

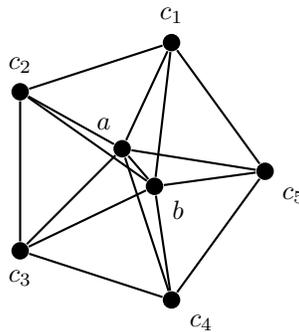


Abbildung 1: BW_5

Aufgabe 3

[Adjazenzmatrix]

Die *Spur* einer $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ ist definiert als die Summe der Diagonalelemente, d.h. $\text{Spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Adjazenzmatrix A .

- (i) Zeigen Sie, dass $\text{Spur}(A^2) = 2|E|$.
- (ii) Zeige, dass gilt: $\text{trace}(A^3) = 6 \times (\text{Anzahl der Dreiecke in } G)$. Dabei bilden drei Knoten i, j, k ein Dreieck, wenn die Kanten ij, jk und ik im Graphen G vorhanden sind.
- (iii) Sei B die Adjazenzmatrix von K_n . Finden Sie eine Formel für $\text{Spur}(B^3)$.
- (iv) Zeigen Sie, dass

$$\text{Spur}(B^4) = n^4 + 2n^3 + n^2,$$

wobei $n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$.

Aufgabe 4

[Brücken]

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Kante $e \in E$ heißt eine *Brücke* von G , wenn die Anzahl der Komponenten von $G \setminus e$ größer ist als die von G .

- (i) Welche Bäume haben Brücken?
- (ii) Für welche m, n hat $K_{m,n}$ eine Brücke? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (iii) Zeigen Sie: Eine Kante e eines Graphen G ist eine Brücke genau dann, wenn e zu keinem Kreis von G gehört.

Aufgabe 5

[Bonus – Graph der Freundschaft]

Haben Sie bemerkt, dass es auf einer Party immer (mindestens) zwei Personen gibt, die genau die gleiche Anzahl von anderen Personen kennen?

Beweisen Sie diese Tatsache, indem Sie den richtigen Graphen einführen. (Nehmen wir an, dass wenn Person A Person B kennt, dann kennt B auch A .)

Abgabe: bis 07.05.2025 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):

“ Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph mit Adjazenzmatrix A . Berechnung von $\text{trace}(A^4)$.

Geschlossene Wege und Potenzen der Adjazenzmatrix Erinnern wir uns: Der Eintrag $(A^k)_{ij}$ zählt die Anzahl der Wege der Länge k vom Knoten i zum Knoten j in G . Insbesondere zählt die Spur der Matrix A^k die Anzahl der geschlossenen Wege der Länge k in G :

$$\text{trace}(A^k) = \sum_{i \in V} (A^k)_{ii}$$

Das ist die Gesamtanzahl der Wege der Länge k , die am selben Knoten starten und enden.

Berechnung von $\text{trace}(A^4)$ Wir möchten $\text{trace}(A^4)$ berechnen, also die Anzahl der geschlossenen Wege der Länge 4 in G .

Es gibt verschiedene Arten von Wegen, die zur Spur beitragen:

1. **Kantensprünge:** Für jede Kante $\{i, j\} \in E$ gibt es geschlossene Wege wie $i \rightarrow j \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow i$ und die Umkehrung. Jedes solche Paar trägt 2 Wege zur Spur bei. Da jeder Endpunkt der Kante einen solchen Weg starten kann, ergibt sich:

$$\text{durch Kanten: } 2|E|$$

2. **Dreiecke:** Jedes Dreieck trägt zusätzliche geschlossene Wege der Länge 4 bei, z. B. durch Durchlaufen der drei Knoten mit Rückweg. Insgesamt trägt jedes Dreieck 4 Wege bei.
3. **4-Zyklen:** Jeder 4-Zyklus (Quadrat) trägt 8 geschlossene Wege der Länge 4 bei, entsprechend 4 Startpunkten und 2 Richtungen (Uhrzeigersinn und Gegenurzeigersinn).

Es gibt eine bekannte Identität in der Graphentheorie, die das zusammenfasst:

$$\text{trace}(A^4) = 2 \sum_{i \in V} \text{deg}(i)^2 + 4 \cdot t + 8 \cdot q$$

wobei:

1. $\text{deg}(i)$ der Grad des Knotens i ist,
2. t die Anzahl der Dreiecke im Graphen ist,
3. q die Anzahl der 4-Zyklen (Vierecke) ist.

„

Aufgabe 7

[König's Lemma für bipartite Graphen]

Wir wollen das folgende [König, 1916] beweisen: *Ein Graph ist bipartit genau dann, wenn er keinen Kreis ungerader Länge hat.*

1. Beweisen Sie, dass ein Graph genau dann bipartit ist, wenn er 2-färbbar ist (d. h. wir die Knoten mit Schwarz und Weiß färben können, sodass keine Kante ihre beiden Endpunkte mit derselben Farbe hat).
2. Beweisen Sie, dass ein Graph, der 2-färbbar ist, keinen ungeraden Kreis hat.
3. Sei G ein Graph ohne ungeraden Kreis, wir möchten ihn mit 2 Farben färben:
 - (a) Erklären Sie, warum wir uns auf zusammenhängende Graphen beschränken können.
 - (b) Angenommen, G ist zusammenhängend und fixieren Sie $x \in V$. Sei V_k die Teilmenge von V , die aus den Knoten besteht, die von x höchstens den Abstand k haben. Beweisen Sie, dass, wenn es eine Kante zwischen $y \in V_{2p}$ und $z \in V_{2q}$ für einige p, q gibt, dann G einen ungeraden Kreis hat.
 - (c) Führen Sie zusammen

Aufgabe 8 [Vollständiger Graph, Pfad, Zyklus, Zirkulanten]
 Gleiche Aufgabe wie Aufgabe 2, jedoch mit den folgenden Graphen:

1. Vollständiger Graph $K_n = (V, E)$ mit $V = \{1, \dots, n\}$ und $E = \{ij ; i \in V, j \in V\}$.
 2. Pfad $P_n = (V, E)$ mit $V = \{1, \dots, n\}$ und $E = \{ij ; j = i + 1\}$.
 3. Zyklus $C_n = (V, E)$ mit $V = \{1, \dots, n\}$ und $E = \{ij ; j = i + 1 \text{ oder } i = 1, j = n\}$.
 4. Sei $a_1, \dots, a_\ell \in \mathbb{N}$ mit $0 < a_1 < \dots < a_\ell \leq \frac{n}{2}$. Wir betrachten den Graphen $C_n(a_1, \dots, a_\ell) = (V, E)$ mit $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ und $E = \{v_i v_{i+a_k} : 1 \leq k \leq \ell, 0 \leq i \leq n-1\}$ (Indizes werden modulo n betrachtet). Sehen Figure 2.
- Bestimmen Sie die Anzahl der Kanten in $C_n(a_1, \dots, a_\ell)$.
5. Dein Lieblingsgraph von Aufgabe 6 aus Tutorium 1.

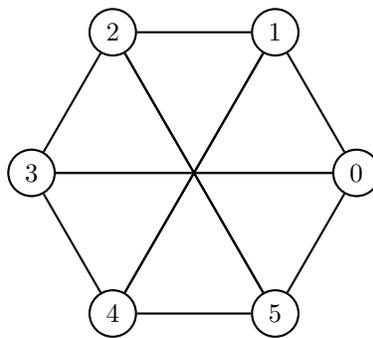


Abbildung 2: $C_6(1, 3)$

Aufgabe 9 [Satz von Mantel]
 Ein *Dreieck* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein Tripel von Knoten $u, v, w \in V$,

die paarweise durch eine Kante verbunden sind, d. h. $uv, vw, uw \in E$. Wir wollen Mantels Theorem beweisen: *Wenn ein Graph auf n Knoten kein Dreieck hat, dann hat er höchstens $\frac{n^2}{4}$ Kanten.*

1. Fixieren Sie n und betrachten Sie $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$, den vollständigen bipartiten Graphen. Wie viele Kanten hat er? Folgern Sie, dass Mantels Theorem optimal ist.
2. Beweisen Sie, dass wenn die Ungleichung von Mantel für alle zusammenhängenden Komponenten von G gilt, dann gilt sie auch für G .
3. Fixieren Sie $G = (V, E)$ ohne Dreieck, mit $\#V = n$. Sei $d(u)$ der Grad von $u \in V$ (d. h. die Anzahl der Nachbarn von u). Zeigen Sie, dass für eine Kante $uv \in E$, dann $d(u) + d(v) \leq n$.
4. Beweisen Sie Mantels Theorem durch Induktion über die Anzahl seiner Kanten.

Hinweis: Drücken Sie die Anzahl der Kanten von G aus, indem Sie $uv \in E$ festlegen und H , den Graphen betrachten, der durch Entfernen der Knoten u und v aus G erhalten wird.

Aufgabe 10 [Konnektivität beim Entfernen eines Knotens]
 Sei G ein zusammenhängender Graph. Wir möchten beweisen, dass es einen Knoten v in G gibt, so dass $G \setminus \{v\}$ zusammenhängend ist.

1. Finde einen zusammenhängenden Graphen, in dem beliebige Knoten entfernt werden können, ohne die Konnektivität zu zerstören.
2. Finde einen zusammenhängenden Graphen, in dem nur 2 verschiedene Knoten entfernt werden können, ohne die Konnektivität zu zerstören.
3. Fixiere einen zusammenhängenden Graphen G und betrachte den längsten Pfad (s_1, s_2, \dots, s_r) in G . Sei $H = G \setminus \{s_1\}$ und t, t' Knoten von H .
 - (a) Warum gibt es einen Pfad (t_1, \dots, t_m) in G mit $t_1 = t$ und $t_m = t'$?
 - (b) Wenn $s_1 \neq t_j$ für alle j ist, zeige, dass t und t' in H verbunden sind.
 - (c) Wenn $s_1 = t_j$ für ein bestimmtes j ist, zeige, dass $t_{j-1} = s_u$ für ein $u \geq 2$ und $t_{j+1} = s_v$ für ein $v \geq 2$.
 - (d) Zeige, dass es einen Pfad von t nach t' in H gibt, und folgere.
 - (e) Zeige, dass $G \setminus \{s_r\}$ ebenfalls zusammenhängend ist, und folgere aus der Minimalität des Beispiels, das du in Frage 2 gefunden hast.

Discrete Mathematics – Loesungblatt 2

Aufgabe 1

[3-reguläre Graphen]

1. Gradformel: $\sum_{u \in V} d(u) = 2|E|$. Für alle $u \in V$ gilt $d(u) = 3$, weil G 3-regulär ist, daher: $3|V| = 2|E|$, also ist $|V|$ gerade (weil 3 es nicht ist).
2. Ein Konstruktionsbeispiel (es gibt viele): $V = \{-p, -(p-1), \dots, -1\} \cup \{1, 2, \dots, p\}$, und der Knoten $-i$ teilt eine Kante mit den drei Knoten $i, i+1$ und $i+2 \pmod{p}$. Dann teilt der Knoten j eine Kante mit den Knoten $-j, -(j-1)$ und $-(j-2) \pmod{p}$, also ist der Graph 3-regulär.

Aufgabe 2

[Gitter, bicycle-wheels, vollständigen k -partiten Graphen]

Man kann diese Aufgabe auch für einen beliebigen q -regulären Graphen für ein Primzahl q durchführen.

(i)

- $|E(BW_k)| = 3k + 1$
- $\Delta(BW_k) = k + 1$
- $\frac{\sum_{v \in V(BW_k)} d(v)}{|V(BW_k)|} = \frac{6k + 2}{k + 2}$
- Die Tailenweite von BW_k beträgt 3 für $k \geq 4$ und 2 für $k = 3$.
- Der Durchmesser von BW_k beträgt 2 für $k \geq 4$ und 1 für $k \leq 3$.

(ii)

- $|E(G_{n,m})| = 2nm - m - n$
- Der durchschnittliche Grad von $G_{n,m}$ ist wie folgt:

n	m	Durchschnittsgrad von $G_{n,m}$
1	1	0
1	≥ 2	$\frac{2m-2}{m}$
≥ 2	1	$\frac{2m-2}{m}$
≥ 2	≥ 2	$\frac{4nm-2n-2m}{nm}$

- Die Tailenweite von $G_{n,m}$ beträgt 4 für $n, m \geq 3$ und 0 oder 1 in anderen Fällen.
- Der Durchmesser von $G_{n,m}$ beträgt $m + n - 2$.

(iii)

- Für $v \in V_i$, $d(v) = \sum_{j \neq i} |V_j| = n - n_i$; durchschnittlicher Grad : $\sum_{i=1}^r \frac{n_i}{n} (1 - \frac{n_i}{n})$

- $|E(K_{n_1, \dots, n_r})| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r n_i(n - n_i)$
- Taillenweite = 3 wenn $r \geq 3$ (es gibt überall Dreiecke), Taillenweite = 4 wenn $r = 2$
- Durchmesser = 2

Aufgabe 3

[Adjazenzmatrix]

- (i) Sei $A^2 = (b_{ij})$. Satz 1.6 besagt, dass b_{ii} die Anzahl der Kantenzüge vom Knoten v_i zu sich selber der Länge 2 zählt. Jeder solche Kantenzug $v_i w v_i$ entspricht einer Kante $v_i w \in E(G)$ für $w \in V(G)$, und umgekehrt entspricht jede Kante $v_i w \in E(G)$ genau zwei Kantenzügen; nämlich $v_i w v_i$ und $w v_i w$. Deshalb gilt $\text{Spur}(A^2) = \sum_{i=1}^{|V(G)|} b_{ii} = 2|E(G)|$.
- (ii) Im Allgemeinen zählt $\text{trace}(A^k)$ die Anzahl der geschlossenen Wege in G der Länge k (d. h. Folgen von k Kanten, die am selben Knoten beginnen und enden). Wenn ein geschlossener Weg die Länge 3 hat, handelt es sich zwangsläufig um ein Dreieck, da ein Weg, der zweimal dieselbe Kante verwendet, nicht dort enden kann, wo er begonnen hat. Daher zählt A_{ii}^3 die doppelte Anzahl der Dreiecke mit dem Knoten i („zweimal“, da jedes Dreieck in zwei Richtungen betreten werden kann). Daher zählt $\sum_i A_{ii}^3$ die doppelte Anzahl der Paare (t, i) , wobei t ein Dreieck von G und i ein Knoten von t ist. Es gibt 3 Eckpunkte in einem Dreieck, also $\sum_i A_{ii}^3 = 2 \# \{(t, i) ; t \text{ Dreieck von } G, i \in t\} = 2 \times 3 \# \{t ; t \text{ Dreieck von } G\} = 6 \times$ (Anzahl der Dreiecke von G).
- (iii) Sei $B^3 = (b_{ij})$. Alle Kantenzüge der Länge 3 von einem Knoten v_i zu sich selber sind von der Form $v_i w z v_i$ für alle $\{w, z\} \in \binom{V(G) \setminus \{v_i\}}{2}$, und jedes Teilmenge $\{w, z\} \in \binom{V(G) \setminus \{v_i\}}{2}$ entspricht zwei Kantenzügen $v_i w z v_i$ und $v_i z w v_i$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \text{Spur}(B^3) &= \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n 2 \binom{n-1}{2} \\ &= n(n-1)(n-2) \end{aligned}$$

- (iv) Sei $B^4 = (b_{ij})$. Es gibt 4 verschiedene Typen von Kantenzügen von einem Knoten v_i zu sich selber der Länge 4:
- $v_i x y z v_i$. Diese entsprechen Teilmengen $\{x, y, z\} \in \binom{[n] \setminus \{v_i\}}{3}$, und jede Teilmenge $\{x, y, z\} \in \binom{[n] \setminus \{v_i\}}{3}$ entspricht 6 Kantenzügen.
 - $v_i x y x v_i$. Diese entsprechen Teilmengen $\{x, y\} \in \binom{[n] \setminus \{v_i\}}{2}$, und jede Teilmengen $\{x, y\} \in \binom{[n] \setminus \{v_i\}}{2}$ entspricht 2 Kantenzügen.

- $v_i x v_i y v_i$. Diese entsprechen Teilmengen $\{x, y\} \in \binom{[n] \setminus \{v_i\}}{2}$, und jede Teilmenge $\{x, y\} \in \binom{[n] \setminus \{v_i\}}{2}$ entspricht 2 Kantenzügen.
- $v_i x v_i x v_i$. Diese entsprechen Elementen $x \in V(G) \setminus \{v_i\}$, und jedes Element $x \in V(G) \setminus \{v_i\}$ entspricht einem eindeutigen Kantenzug.

Es folgt, dass:

$$\begin{aligned} \text{Spur}(B^4) &= \sum_{i=1}^n b_{ii} = n \left(6 \binom{n-1}{3} + 2 \binom{n-1}{2} + 2 \binom{n-1}{2} + (n-1) \right) \\ &= n^4 + 2n^3 + n^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

[Brücken]

- (i) Das Entfernen einer beliebigen Kante eines Baums erzeugt 2 verbundene Komponenten: Alle Kanten von Bäumen sind Brücken.
- (ii) Wenn wir eine Kante von $K_{m,n}$ entfernen, bleibt es genau dann verbunden, wenn jeder Knoten Grad mindestens 2 hat, d.h., wenn $m, n \geq 2$ ist. Die einzigen vollständigen bipartiten Graphen mit einer Brücke sind $K_{1,n}$ (oder $K_{m,1}$).
- (iii) Ohne Einschränkung sei G zusammenhängend. Angenommen, e liegt auf einem Zyklus $C = u_1 \dots u_n u_1$ von G und sei o.B.d.A. $e = u_n u_1$. Seien u, v Knoten von $G \setminus e$. Dann gibt es einen u - v -Weg P in G , da G zusammenhängend ist. Wenn P die Kante e nicht benutzt, ist es ein u - v -Weg in $G \setminus e$. Angenommen, P benutzt die Kante e . Wenn wir e in P durch den Pfad $u_1 \dots u_n$ ersetzen, erhalten wir einen Weg von u nach v in $G \setminus e$, der e nicht benutzt. Daher gibt es einen u - v -Weg in $G \setminus e$, und die Anzahl der Komponenten nimmt nicht zu. Somit ist e keine Brücke.

Nun nehmen wir an, dass $e = uv$ auf keinem Zyklus liegt. Dann liegen u und v in verschiedenen Komponenten von $G \setminus e$. Denn wenn sie in derselben Komponente wären, gäbe es einen u - v -Weg in $G \setminus e$ und daher auch in G . Zusammen mit e würde dieser Weg dann einen Zyklus bilden, was der Annahme widerspricht. Somit hat $G \setminus e$ mindestens zwei Komponenten, und e ist eine Brücke.

Aufgabe 5

[Bonus – Graph der Freundschaft]

Sei $G = (V, E)$ der Graph, in dem V die Menge der Personen auf der Party ist, und es eine Kante zwischen zwei Personen gibt, wenn sie sich kennen. Wir wollen beweisen, dass es zwei Knoten in G mit dem gleichen Grad gibt. Sei $n = |V|$, dann liegen die Grade zwischen 0 und $n-1$, also ist $d : V \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$. Wenn d injektiv ist, dann ist sein Bild kardinal $|V| = n$, also ist sein Bild genau $\{0, \dots, n-1\}$. Dies impliziert, dass es einen Knoten u mit Grad 0 gibt (jemand,

der niemanden kennt), und einen Knoten v mit Grad $n - 1$ (jemand, der alle kennt). Das ist offensichtlich nicht möglich: Ist $(u, v) \in E$ oder nicht? Daher ist d nicht injektiv: Es gibt $u, v \in V$ mit $u \neq v$ und $d(u) = d(v)$.

Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

Wende die von ChatGPT angegebene Formel auf ein Dreieck an (d. h. den vollständigen Graphen mit drei Knoten): Es hat drei Knoten vom Grad 2 und ein Dreieck. Die angegebene Formel ergibt $2 \cdot 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 1 + 0 = 28$. Die Adjazenzmatrix

lautet jedoch $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, mit $A^4 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, also $\text{trace}(A^4) = 18 \neq$

28.

Der Fehler liegt in dem völligen Unsinn, den sie über Dreiecke erzählt.

Aufgabe 7

[König's Lemma für bipartite Graphen]

1. Wenn $G = (V, E)$ bipartit ist, dann sei $V = A \sqcup B$ so, dass es keine Kante zwischen den Knoten in A oder zwischen den Knoten in B gibt. Dann erhält man eine 2-Färbung von G , indem man A weiß und B schwarz färbt. Umgekehrt, wenn G 2-färbbar ist, dann sei A die Menge der weißen Knoten und B die der schwarzen. Wir haben dann $V = A \sqcup B$, und es gibt keine Kante zwischen den Knoten in A oder in B . Daher ist G bipartit.
2. Wenn G k -färbbar ist, dann auch alle seine Teilgraphen (durch direkte Anwendung der Definitionen). Ein ungerader Kreis ist nicht 2-färbbar, weil er nicht bipartit ist, daher hat ein 2-färbbarer Graph keinen ungeraden Kreis.
3. (a) Ein Graph ist bipartit genau dann, wenn alle seine verbundenen Komponenten es sind. Ein Graph ist ungerade-Zykel-frei genau dann, wenn alle seine verbundenen Komponenten es sind. Daher können wir uns auf verbundene Komponenten beschränken.
 - (b) Angenommen, es gibt $y \in V_{\leq 2p}$ und $z \in V_{\leq 2q}$, so dass $(y, z) \in E$. Betrachten Sie einen Pfad u_0, \dots, u_{2p} mit $u_0 = x$ und $u_{2p} = y$, und einen Pfad v_0, \dots, v_{2q} mit $v_0 = x$ und $v_{2q} = z$. Es gibt eine Kante $(u_{2p}, v_{2q}) \in E$, daher ist $\mathcal{P} = (u_0, u_1, \dots, u_{2p}, v_{2q}, v_{2q-1}, \dots, v_0)$ ein Kantepfad in G , der von x nach x führt. Er hat die Länge $2p + 2q + 1$, die ungerade ist, aber er ist nicht unbedingt ein Kreis, weil einige Knoten gleich sein können (d.h. $u_i = v_j$ für einige i, j). Betrachten Sie die Vereinigung aller Kanten in \mathcal{P} , und entfernen Sie die Kanten, die zweimal vorkommen, um \mathcal{Q} zu erhalten. Dies ergibt eine Sammlung von Kreisen, und \mathcal{Q} enthält eine ungerade Anzahl von Kanten (weil wir eine gerade Anzahl von Kanten aus \mathcal{P} entfernt haben). Folglich ist mindestens einer der Kreise in \mathcal{Q} ungerade.
 - (c) Angenommen, G hat keinen ungeraden Kreis und $x \in V$ ist festgelegt. Färben Sie x weiß und alle Knoten in geradem Abstand von x

weiß, und die Knoten in ungeradem Abstand schwarz. Dies ist eine 2-Färbung von G , weil (i) es keine Kante zwischen weißen Knoten gibt (sonst gäbe es einen ungeraden Kreis gemäß der vorherigen Frage), und (ii) es keine Kante zwischen schwarzen Knoten gibt (wenden Sie das Lemma der letzten Frage von einem schwarzen Knoten statt von x aus an). Daher ist ein Graph, der keinen ungeraden Kreis hat, 2-färbbar, was bedeutet, dass er bipartit ist.

Aufgabe 8 [Vollständiger Graph, Pfad, Zyklus, Zirkulanten]

(1) $|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$; Grade = $n - 1$ = durchschnittlicher Grad; Tailleweite = 3; Durchmesser = 1.

(2) $|E(P_n)| = n - 1$; Grade $\in \{1, 2\}$; durchschnittlicher Grad = $\frac{2n-2}{n}$; Tailleweite = $+\infty$; Durchmesser = n .

(3) $|E(C_n)| = n - 1$; Grade = 2 = durchschnittlicher Grad; Tailleweite = n ; Durchmesser = $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

(4) Nehme zunächst an, dass $a_\ell < \frac{n}{2}$. Für $v_i \in V(C_n(a_1, \dots, a_\ell))$ gilt dann $N(v_i) = \{v_{i \pm a_j} : j \in [\ell]\}$. Da $a_j < \frac{n}{2}$ sind die Elemente dieser Menge paarweise verschieden und somit gilt $d(v_i) = 2\ell$. Nun folgt

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} n \cdot 2\ell = n\ell.$$

Ist $a_\ell = \frac{n}{2}$, so gilt $d(v) = 2\ell - 1$ für jedes $v \in V$ und somit

$$|E| = \frac{2n\ell - n}{2}.$$

Aufgabe 9

[Satz von Mantel]

- Die Anzahl der Kanten von $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ beträgt $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times \lceil \frac{n}{2} \rceil = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. Daher ist die Mantel-Ungleichung optimal, weil die Anzahl der Knoten von $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ n beträgt.
- Nehmen Sie zwei disjunkte Teilmengen von V ohne Kante zwischen ihnen (nicht unbedingt verbundene Komponenten), sagen wir V_1 und V_2 mit $|V_1| = n_1$ und $|V_2| = n_2$. Beide Teilgraphen sind dreiecksfrei, daher gilt $|E_1| \leq \frac{n_1^2}{4}$ und $|E_2| \leq \frac{n_2^2}{4}$. Folglich, da es keine Kante zwischen V_1 und V_2 gibt: $|E| = |E_1| + |E_2| \leq \frac{n_1^2}{4} + \frac{n_2^2}{4} \leq \left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)^2 = \frac{(n_1+n_2)^2}{4}$. Durch Induktion, wenn die Mantel-Ungleichung für verbundene Komponenten gilt, gilt sie auch für den gesamten Graphen.
- Da G kein Dreieck hat, ist, wenn x ein Nachbar von u ist, x **nicht** ein Nachbar von v . Daher teilt jeder $x \in V \setminus \{u, v\}$ höchstens eine Kante mit einem der Knoten u oder v : Die Anzahl der Kanten zwischen $\{u, v\}$ und $V \setminus \{u, v\}$ beträgt höchstens $|V \setminus \{u, v\}| = n - 1$. Wenn man die Kante (u, v) hinzufügt, erhält man $d(u) + d(v) \leq n$.

4. Unsere Induktion wird bei jedem Schritt 2 Knoten entfernen, daher initialisieren wir mit $n = 1$ und $n = 2$. Für $n = 1$ gibt es keine Kante, daher gilt die Aussage; für $n = 2$ gibt es höchstens 1 Kante, daher gilt die Aussage. Angenommen, Mantels Theorem gilt für alle Graphen mit $n - 2$ Knoten, und wählen Sie $G = (V, E)$ mit n Knoten. Wählen Sie eine Kante $(u, v) \in E$ und betrachten Sie den Graphen H , der durch Entfernen von u und v aus G entsteht. Der Graph H hat $n - 2$ Knoten, daher gilt $|E(H)| \leq \frac{(n-2)^2}{4}$. Außerdem sind die Kanten von G entweder in H enthalten oder benachbart zu u oder v , daher gilt (das -1 vermeidet das doppelte Zählen der Kante (u, v)):

$$|E| = |E(H)| + d(u) + d(v) - 1 \leq \frac{(n-2)^2}{4} + n - 1 = \frac{n^2}{4}$$

Man kann tatsächlich beweisen, dass der ausgewogene bipartite Graph von 1. der einzige Graph ohne Dreieck ist, der Gleichheit in der Mantel-Ungleichung erreicht, aber das werden wir hier nicht tun.

Aufgabe 10

[Konnektivität beim Entfernen eines Knotens]

1. Vollständiger Graph
2. Pfad
3. (a) t und t' sind ebenfalls Knoten von G , und G ist zusammenhängend.
 - (b) Wenn $s_1 \neq t_j$, dann sind alle t_j Knoten von H , daher ist (t_1, \dots, t_m) ein Pfad in H .
 - (c) Wenn $t_{j-1} \notin \{s_2, \dots, s_r\}$, kann man t_{j-1} zum Pfad hinzufügen, um $(t_{j-1}, s_1, \dots, s_r)$ zu erhalten, da $t_{j-1}s_1$ eine Kante von G ist. Dann ist dieser neue Pfad länger als (s_1, \dots, s_r) , was der Annahme widerspricht. Das Gleiche gilt für t_{j+1} .
 - (d) Angenommen, $u \leq v$, und betrachten wir $(t_1, \dots, t_{j-1}, s_{u+1}, \dots, s_{v-1}, t_{j+1}, \dots, t_m)$. Alle Knoten sind durch die Konstruktion in H , es gibt eine Kante zwischen jedem aufeinanderfolgenden Knoten, und t und t' sind in H verbunden (das Gleiche gilt, wenn $v \leq u$). Folglich ist H zusammenhängend (wir haben gezeigt, dass alle Endpunkte eines längsten Pfades verbunden sind).
 - (e) Tatsächlich haben wir gezeigt, dass jeder Endpunkt eines längsten Pfades entfernt werden kann, ohne die Konnektivität von G zu beeinträchtigen. Dies gilt auch für s_r , und $s_r \neq s_1$, daher können für jeden Graphen mindestens 2 Knoten entfernt werden, ohne die Konnektivität zu unterbrechen. Für einen Pfad gibt es **genau** 2 solcher Knoten.

Diskrete Mathematik – Sommersemester 2025

Übungsblatt 3

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden. Die Bonusübung kann bis zu +5 Bonuspunkte geben (daher sollte man sie nicht zu seiner Priorität machen).

Aufgabe 1

[Perfektes Matching]

Ein *perfektes Matching* M in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Sammlung von Kanten $M \subseteq E$, so dass jeder Knoten in V mit genau einer der Kanten von M benachbart ist.

1. Zeige, dass K_n genau dann ein perfektes Matching hat, wenn n gerade ist.
2. Zeige, dass $K_{n,m}$ genau dann ein perfektes Matching hat, wenn $n = m$ ist.
3. Wie viele verschiedene perfekte Matchings hat $K_{3,3}$?
4. Alice und Barbara spielen ein Spiel auf einem Graphen G . Alice beginnt, indem sie einen Knoten auswählt, dann spielen die Spielerinnen abwechselnd, indem sie einen Nachbarn des zuletzt gewählten Knotens (der noch nicht gewählt wurde) auswählen. Die Spielerin, die nicht spielen kann, verliert. Zeige, dass wenn G ein perfektes Matching hat, Barbara immer gewinnen kann, egal was Alice tut.

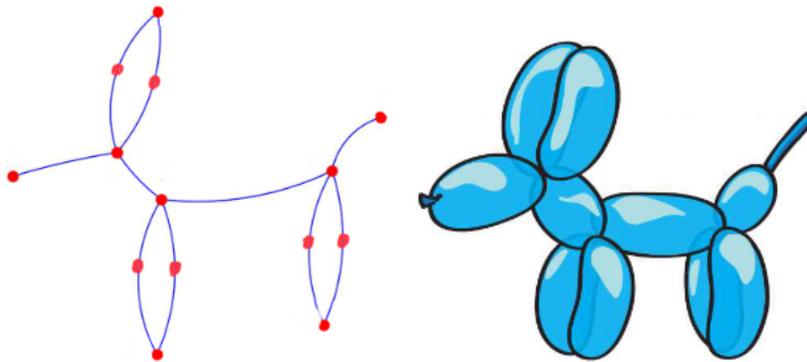


Abbildung 3: Eine Ballonskulptur

Aufgabe 2

[Trail partition und Ballonskulpturen]

Du musst einem Ballonkünstler helfen, Ballonskulpturen herzustellen, siehe Figure 3 (rechts). Ein Graph $G = (V, E)$ kann aus k Ballons bestehen, wenn es k

disjunkte Kantenzüge P_1, \dots, P_k gibt, sodass jede Kante $e \in E$ genau einem der Pfade P_i angehört (ein Kantenzug kann einen Knoten mehrmals verwenden; zwei Kantenzüge sind disjunkt, wenn sie keine gemeinsame Kante haben, sie könnten aber gemeinsame Knoten haben).

1. Der Graph in Figure 3 (links) kann aus 1 Ballon hergestellt werden, wie in Figure 3 (rechts) illustriert ist. Welcher Satz aus der Vorlesung gewährleistet das?
2. Angenommen, ein zusammenhängender Graph G kann aus $k \geq 1$ Ballons hergestellt werden. Zeige, dass G eine gerade Anzahl m von Knoten ungeraden Grades hat, wobei $m \leq 2k$.
3. Wie viele Ballons benötigen Sie, um die Graphen in Figure 4 herzustellen? Zeichnen Sie für jeden die Aufteilung des Graphen in diese Ballons, wie in Figure 4 (zweiter Graph) illustriert.

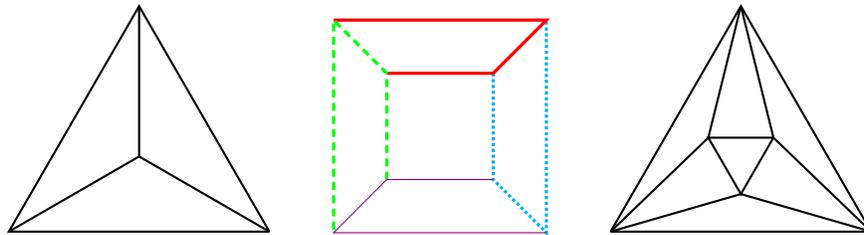


Abbildung 4: Graphen von Platonischen Körpern. Der zweite Graph ist bereits in 4 Ballons (= 1 blau gestrichelt + 1 rot dick + 1 grün gestrichelt + 1 violett dünn) aufgeteilt: Sie müssen die anderen Graphen in Ballons aufteilen.

Aufgabe 3

[Gradsequenzen in Bäumen]

1. Seien d_1, \dots, d_n positive natürliche Zahlen und $n \geq 2$ und es gelte

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2.$$

Zeigen Sie, dass ein Baum auf n Knoten mit Knotengraden d_1, \dots, d_n existiert. Man bezeichnet d_1, \dots, d_n auch als Gradsequenz.

2. Sei T ein Baum mit 12 Knoten mit genau drei Knoten vom Grad 3 und genau einem Knoten vom Grad 2. Bestimmen Sie die Gradsequenz von T .
3. Legt die Gradsequenz aus (ii) den Baum T bereits eindeutig (bis auf Isomorphie) fest? Geben Sie gegebenenfalls zwei nicht-isomorphe Bäume mit der entsprechenden Gradsequenz an.

Aufgabe 4

[Nicht-eulerische Graphen eulerisch machen]

1. Beweisen Sie, dass die Anzahl der Knoten ungeraden Grades in einem Graphen G stets gerade ist.
2. Sei G ein Graph, der nicht eulersch ist. Beweisen Sie, dass man G durch Hinzufügen eines Knotens und einiger Kanten in einen eulerschen Graphen überführen kann.
3. Sei G ein Graph, der nicht pfad-eulersch ist. Formulieren und beweisen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an G , sodass es einen pfad-eulerschen Graphen H gibt, der durch *Hinzufügen* eines Knotens und einiger Kanten zu G entsteht.
4. Sei G ein Graph, der nicht eulersch ist, mit $2k$ Knoten ungeraden Grades. Formulieren und beweisen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an G , sodass es einen eulerschen Graphen H gibt, der durch *Entfernen* k Kanten aus G entsteht. *Hinweis:* Betrachten Sie den Teilgraphen, der von den Knoten ungeraden Grades in G und den Kanten zwischen diesen gebildet wird, und lesen Sie dann Aufgabe 1 erneut.

Aufgabe 5

[Bonus – Organisation eines Schulausflugs]

Jeden Tag gehen eine Gruppe von 12 Kindern spazieren, indem sie sich paarweise an den Händen halten (wie Sie es wahrscheinlich vor langer Zeit getan haben). Wie viele Tage können sie spazieren gehen, wenn wir nicht möchten, dass ein Kind zweimal denselben Nachbarn hat? Was ist, wenn der Spaziergang jetzt in Reihen zu dritt erfolgt?

Abgabe: bis 14.05.2025 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):

“ Wir sollen ermitteln: Wie viele bipartite Graphen gibt es auf 3 beschrifteten Knoten?

Ein Graph ist bipartit, wenn seine Knotenmenge in zwei disjunkte Teilmengen A und B aufgeteilt werden kann, wobei Kanten nur zwischen A und B existieren.

Schritt 1: Alle Bipartitionen aufzählen Die möglichen Bipartitionen von $V = \{1, 2, 3\}$ sind:

- $|A| = 1, |B| = 2$: Es gibt $\binom{3}{1} = 3$ solche Partitionen. Für jede gibt es $2^2 = 4$ mögliche bipartite Graphen. - $|A| = 2, |B| = 1$: Wieder $\binom{3}{2} = 3$, und jede gibt $2^2 = 4$ bipartite Graphen.

Die Gesamtzahl der bipartiten Graphen ist also:

$$3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 24.$$

Wenn wir den leeren Graphen (der dem Fall entspricht, in dem keine Kanten vorhanden sind) einbeziehen, erhalten wir die Gesamtzahl:

$$24 + 1 = 25.$$

Daher gibt es 25 bipartite Graphen auf 3 beschrifteten Knoten. ”

Das ist falsch, erklären Sie mir, warum.

Aufgabe 7

[Anzahl der perfekten Matchings]

1. Wie viele perfekte Matchings gibt es im Pfad P_n (unterscheide n ungerade oder gerade)?
2. Wie viele perfekte Matchings gibt es im Kreis C_n (unterscheide n ungerade oder gerade)?
3. Wie viele perfekte Matchings gibt es im vollständigen Graphen K_n (unterscheide n ungerade oder gerade)?
4. Wie viele perfekte Matchings gibt es im vollständigen bipartiten Graphen $K_{n,n}$?

Aufgabe 8

[Adjazenzmatrix – erneut]

Im Folgenden betrachten wir den vollständigen bipartiten Graphen $K_{n,m}$ und seine Adjazenzmatrix $A_{n,m}$. Die Knoten von $K_{n,m}$ sind mit a_1, \dots, a_n und b_1, \dots, b_m beschriftet, sodass seine Kanten $a_i b_j$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, m\}$ sind. Wir beschriften die Koordinaten von $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+m}$ entsprechend.

1. Beweise, dass 0 ein Eigenwert der Matrix $A_{n,m}$ von Vielfachheit mindestens $n + m - 2$ ist. (Hinweis: Suche einen Eigenvektor mit sehr wenigen Nicht-Null-Koordinaten.)

2. Für $n = m$, beweise, dass n und $-n$ Eigenwerte von $A_{n,n}$ sind. Gib eine Diagonalisierung von $A_{n,n}$ an (dh. gebe alle Eigenvektoren zusammen mit den Eigenwerten an).
3. Für $n \neq m$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+m}$, beweise, dass der Wert der Koordinate von $A\mathbf{v}$ auf dem Knoten a_i nicht von i abhängt.
4. Für $n \neq m$, schlussfolgere, finden Sie die Eigenvektoren von $A_{n,m}$, die zu einem von Null verschiedenen Eigenwert gehören, und leiten Sie ab, dass sie diagonalisierbar sind.

Aufgabe 9

[Fleury's Algorithmus]

In der Vorlesung habt ihr einen Beweis des folgenden Satzes gesehen: *Wenn ein Graph genau 2 Knoten ungeraden Grades hat, dann besitzt er einen eulerschen Pfad.* Aus der Vorlesung kann man einen Algorithmus (Hierholzers Algorithmus, 1873) ableiten, der explizit den eulerschen Pfad konstruiert. Hier geben wir einen anderen Algorithmus an (der einfacher zu beweisen, aber in der Praxis weniger effizient ist): Fleury's Algorithmus (1883).

- (a) Fixiere einen Graphen G . Starte an einem Knoten u ungeraden Grades und mit einem leeren Pfad \mathcal{P} .
- (b) Wähle einen Nachbarn von u so, dass $G \setminus uv$ zusammenhängend bleibt, und füge die Kante uv zu deinem Pfad \mathcal{P} hinzu.
- (c) Falls kein solcher Nachbar existiert, dann hat u genau eine inzidente Kante: füge diese Kante zu deinem Pfad \mathcal{P} hinzu und beende den Algorithmus.
- (d) Entferne die Kante uv aus dem Graphen und wiederhole den Prozess ab v (im Graphen $G \setminus uv$) bei Schritt (b).

Beweise, dass dieser Algorithmus terminiert und dass der Pfad \mathcal{P} beim Stoppen ein eulerscher Pfad ist. Was ist die Komplexität dieses Algorithmus?

Aufgabe 10

[Aufgabe 4 – Fortsetzung]

Wenn du die Fragen 1 und 2 der obigen Aufgabe 4 und die Übungen zu Adjazenzmatrizen aus den vorherigen Übungsblättern gelöst hast:

5. Beweise, dass es n^{k-1} Zyklen gerader Länge in $K_{n,n}$ gibt, die a_1 enthalten (wobei Zyklen mehrmals dieselbe Kante benutzen dürfen), und dass es 0 Zyklen ungerader Länge gibt.

Aufgabe 11

[Domino-Steine]

Gegeben ist ein Stapel Domino-Steine, der alle möglichen Steine enthält, die man mit den Zahlen von 1 bis 5 bilden kann. Zwei Steine können nebeneinander gelegt werden, wenn an ihren Berührungsrändern dieselbe Zahl steht.

1. Wie viele Domino-Steine enthält der Stapel?
2. Kannst du alle Domino-Steine zu einem Kreis anordnen, sodass jede Berührungsstelle passt?

Ersetze in der Aufgabenstellung die Zahl 5 durch ein beliebiges n und bearbeite die Aufgabe erneut.

Aufgabe 12 [Drahtgerüst eines Würfels]
Du hast 120 cm Stahldraht zur Verfügung. Du möchtest damit das Gerüst eines Würfels mit Kantenlänge 10 cm bauen.

1. Kannst du den Würfel mit dem vorhandenen Draht vollständig konstruieren?

Aufgabe 13 [Polygamie-Heiratssatz und Tic-Tac-Toe]

1. Sei $G = (S \cup T, E)$ ein bipartiter Graph, sodass für alle $A \subseteq S$ die *Polygamie-Heiratsbedingung* $|N(A)| \geq 2 \cdot |A|$ gilt. Zeigen Sie, dass es eine Familie paarweiser disjunkter Teilgraphen von G gibt, die isomorph zu $K_{1,2}$ sind, sodass jeder Knoten aus S Mittelpunkt eines dieser Teilgraphen $K_{1,2}$ ist. (Hinweis: Betrachten Sie den Hilfsgraphen G' , in dem für jeden Knoten $v \in S$ ein weiterer Knoten v' eingefügt wird, der die selben Nachbarn wie v besitzt. Wenden Sie den normalen Heiratssatz auf G' an.)
2. Ein *Positionsspiel* besteht aus einem *Spielbrett*, modelliert durch die Menge $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ der Felder, sowie sog. *Gewinnmengen*, modelliert durch Teilmengen $W_1, \dots, W_m \subset X$. Beispielsweise handelt es sich bei Tic-Tac-Toe um ein Positionsspiel, dessen Spielfeld aus 9 Feldern besteht mit 8 Gewinnmengen (den vertikalen, horizontalen und diagonalen Linien). Zwei Spieler wählen abwechselnd Felder aus X aus. Derjenige Spieler, der als erstes alle Felder einer Gewinnmenge gewählt hat, gewinnt. Wir betrachten ein Positionsspiel mit der Eigenschaft, dass jede Gewinnmenge aus mindestens 10 Feldern besteht und jedes Feld des Spielbretts in höchstens 5 Gewinnmengen liegt. Zeigen Sie, dass der zweite Spieler immer mindestens ein *Unentschieden* erreichen kann. (Hinweis: Zeigen Sie, dass es eine Menge disjunkter Paare von Feldern gibt, sodass jede Gewinnmenge mindestens eines dieser Paare enthält und verwenden Sie dies um eine Strategie des zweiten Spielers zu betimmen.)

Discrete Mathematics – Loesungblatt 3

Aufgabe 1

[Perfekte Matchings]

1. Ein Matching deckt eine gerade Anzahl von Knoten ab (das heißt $2 \nmid M$), daher gibt es keine Matching, die jeden Knoten abdeckt, wenn n ungerade ist. Wenn n gerade ist, dann ist $M = \{(2i)(2i + 1) ; i \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}\}$ ein perfektes Matching (du sollst es zeichnen).
2. Die Kanten in einem Matching in $K_{n,m} = (A \cup B, E)$ wählen einen linken Knoten (in A) und einen rechten Knoten (in B), daher, wenn M perfekt ist, dann ist jeder Knoten in A mit einem Knoten in B verbunden, das heißt, $n = |A| = |B| = m$. Umgekehrt, wenn $n = m$ ist, schreibe $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ und nimm $M = \{a_i b_i ; i \in \{1, \dots, n\}\}$.
3. Ein perfektes Matching von $K_{n,n}$ entspricht einer Bijektion σ von $\{1, \dots, n\}$, indem $\sigma(i) = j$ für $ij \in M$ gesetzt wird. Daher gibt es so viele perfekte Matchings wie Bijektionen von $\{1, \dots, n\}$, d. h. Permutationen: Es gibt $n!$ perfekte Matchings von $K_{n,n}$. Für $n = 3$ gibt es $3! = 6$ perfekte Matchings von $K_{3,3}$ (du sollst sie zeichnen).
4. Angenommen, Alice spielt einen Knoten u . Dann gibt es einen (eindeutigen) Knoten v_u , sodass uv_u eine Kante im Matching M ist (egal welcher u , da M perfekt ist), dann spielt Bob v_u . Wir müssen beweisen, dass es immer möglich ist, dass Bob spielt, egal welchen Knoten Alice wählt, das heißt, beweisen, dass v_u noch nicht gespielt wurde (v_u ist tatsächlich ein Nachbar von u in G , da das Matching dies sicherstellt). Angenommen, das ist nicht der Fall: v_u wurde zuvor gespielt. Kann Bob es gespielt haben? Nein, weil Bob nur Kanten aus dem Matching spielt, spielt Bob v_u nur, wenn u gespielt wird (und u wurde zuvor nicht gespielt). Kann Alice es gespielt haben? Nein, weil wenn Alice v_u spielt, dann spielt Bob u (und es ist an der Reihe von Alice), und u wurde zuvor nicht gespielt. Daher kann Bob auf jede Wahl von Alice antworten, und da der Graph endlich ist, wird Alice irgendwann keine Möglichkeiten mehr haben und verlieren.

Aufgabe 2

[Trail partition und Ballonskulptur]

1. 1 Ballon entspricht einem Euler-Pfad. Daher ist „aus 1 Ballon gemacht sein“ äquivalent dazu, pfad-Eulerisch zu sein. Gemäß der Vorlesung ist das äquivalent dazu, genau 2 Knoten ungeraden Grades zu haben. Da dies auf den Hundegraphen zutrifft, kann er aus 1 Ballon gemacht werden.
2. Jeder Ballon ist ein Teilgraph von G mit genau 2 Knoten ungeraden Grades. Der Grad eines Knotens v in G ist die Summe des Grades von v in jedem Ballon. Wenn sein Grad ungerade ist, dann hat er in mindestens 1

Ballon einen ungeraden Grad (wenn er in jedem Ballon gerade wäre, dann wäre er gerade in G). Daher kann die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad nicht die Anzahl der Endpunkte von Ballons überschreiten: $m \leq 2k$. Beachte, dass die Umkehrung auch wahr ist, aber komplizierter zu zeigen: Wenn G $2k$ Knoten ungeraden Grades hat, dann kann er aus k Ballons gemacht werden.

3. Siehe Figure 5. Das Tetraeder (links) kann aus 2 Ballons gemacht werden: Es kann nicht aus 1 Ballon gemacht werden, da es > 2 ungerade Knoten hat, und die Abbildung zeigt, wie es mit 2 Ballons gemacht werden kann. Das Oktaeder (rechts) ist eulerisch, da es keine ungeraden Knoten hat, die Abbildung zeigt, wie die Kanten angeordnet werden können.

Du kannst die Übung für die Graphen der beiden anderen platonischen Körper machen, die unten gegeben sind.

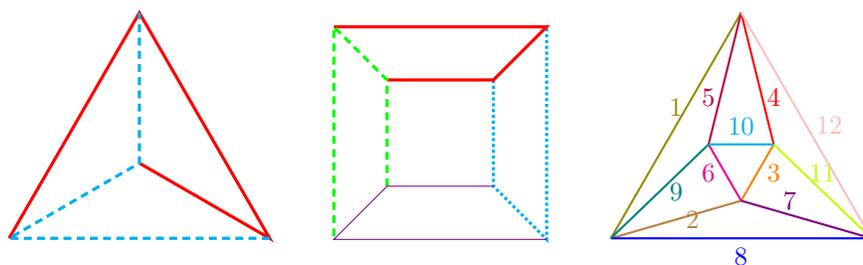


Abbildung 5: Lösung des Ballon-Problems

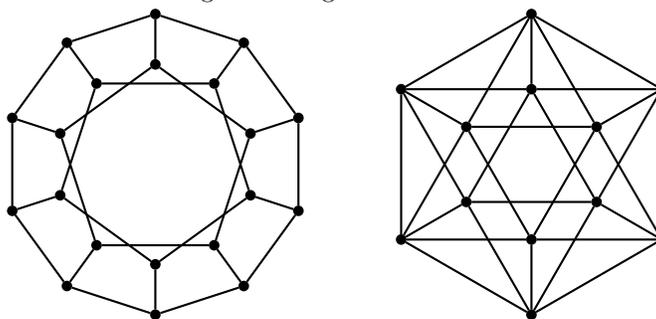


Abbildung 6: The dodecahedral graph and the icosahedral graph. (Good luck!)

Aufgabe 3

[Gradsequenzen für Bäume]

- (i) Seien d_1, \dots, d_n gegeben mit $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$. Wir beweisen die Behauptung mittels Induktion nach n . Ist $n = 2$, so ist $(1, 1)$ die einzige mögliche Sequenz, die die Voraussetzungen erfüllt und der Graph mit 2 Knoten und einer Kante hat genau diese Gradsequenz. Sei $n \geq 3$. Dann existiert

ein i , sodass $d_i < 2$. Andernfalls würde $\sum_{i=1}^n d_i \geq 2n$ gelten. Da $d_i > 0$ nach Voraussetzung, gilt $d_i = 1$. Andererseits muss auch ein j existieren mit $d_j > 1$ (sonst $\sum_{k=1}^n d_k \leq n$). Ohne Einschränkung sei $d_n = 1$ und $d_{n-1} > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein Baum mit Gradfolge $d_1, \dots, d_{n-2}, d_{n-1} - 1$. Fügt man ein neues Blatt zu dem Knoten $n - 1$ hinzu, erhält man einen Baum mit der Gradfolge d_1, \dots, d_n .

- (ii) Sei $V(T) = \{u_1, \dots, u_{12}\}$ und sei weiter $d(u_{12}) = 2$, $d(u_9) = d(u_{10}) = d(u_{11}) = 3$. Es gilt gemäß Vorlesung

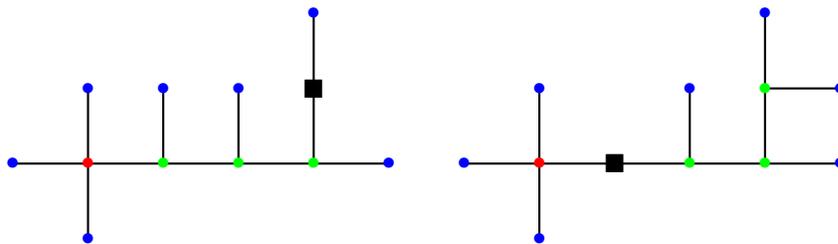
$$\sum_{i=1}^{12} d(u_i) = 2 \cdot |V(T)| - 2 = 22.$$

Da $\sum_{i=9}^{12} d(u_i) = 11$ nach Voraussetzung, folgt

$$\sum_{i=1}^8 d(u_i) = 11.$$

Desweiteren wissen wir, dass $d(u_i) \in \{1\} \cup \{a : a \geq 4\}$ gelten muss. Es muss dann ein Knoten u_i mit $d(u_i) \geq 4$ existieren (sonst wäre $\sum_{i=1}^8 d(u_i) \leq 8$). Andererseits kann es keinen Knoten vom Grad mindestens 5 geben, da sonst $\sum_{i=1}^{12} d(u_i) \geq 7 \cdot 5 = 35 > 22$ gelten würde. Damit existiert ein Knoten vom Grad 4 und ohne Einschränkung sein $d(u_8) = 4$. Dann folgt $\sum_{i=1}^7 d(u_i) = 7$ und da alle Grade ≥ 1 sind, muss $d(u_1) = \dots = d(u_7) = 1$ gelten. Die Gradsequenz ist also $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4)$.

- (iii) Die Gradfolge bestimmt den Baum nicht eindeutig. Die folgende Darstellung zeigt zwei nicht-isomorphe Bäume mit derselben Gradfolge (die Knoten des Grades 2 grenzt im rechten Baum an den Scheitelpunkt vom Grad 4, im linken Baum jedoch nicht).



Aufgabe 4

[Nicht-eulerische Graphen eulerisch machen]

1. Nach dem Handshake-Lemma gilt: $\sum_{v \in V(G)} d_v = 2 \#E$, also ist die Anzahl der Summanden mit ungeradem Grad gerade, d.h. die Anzahl der Knoten ungeraden Grades in G ist gerade.
2. Da G nicht eulerisch ist, besitzt es mindestens einen Knoten ungeraden Grades. Sei u_1, \dots, u_{2k} die Knoten ungeraden Grades von G (nach dem vorherigen Punkt wissen wir, dass es eine gerade Anzahl davon gibt). Betrachte den Graphen H , der aus G entsteht, indem man einen zusätzlichen Knoten v_o sowie Kanten $u_i v_o$ für alle $i \in [2k]$ hinzufügt. Alle Knoten dieses neuen Graphen H haben nun geraden Grad: Die Knoten mit vorher schon geradem Grad bleiben unverändert, die ungeraden Knoten erhalten genau eine zusätzliche Kante, und v_o hat Grad $2k$. Daher ist H eulerisch.
3. Wir zeigen: Jeder nicht pfad-eulerische Graph G kann durch Hinzufügen eines Knotens und einiger Kanten pfad-eulerisch gemacht werden. Wie zuvor betrachten wir H , das durch Hinzufügen von v_o und allen Kanten $u_i v_o$ entsteht, wobei u_i ein Knoten ungeraden Grades in G ist. H hat dann 0 Knoten ungeraden Grades – wir möchten jedoch, dass es genau 2 davon gibt, damit es pfad-eulerisch ist. Falls G einen Knoten w mit geradem Grad hat, füge die Kante $w v_o$ zu H hinzu – fertig. Falls G einen Knoten u_1 mit ungeradem Grad hat, entferne aus H die Kante $u_1 v_o$ – fertig (beachte, dass H weiterhin zusammenhängend ist, da G mindestens zwei Knoten ungeraden Grades haben muss).
4. Sei G_{odd} der Graph mit den Knoten $\{u_1, \dots, u_{2k}\}$, den Knoten ungeraden Grades von G , und mit allen Kanten von G , die diese Knoten verbinden (dies ist der vom ungeraden Knoten *induzierte* Teilgraph von G). Wir zeigen: G kann durch Entfernen von k Kanten eulerisch gemacht werden genau dann, wenn G_{odd} ein perfektes Matching besitzt. Angenommen, G_{odd} besitzt ein perfektes Matching: Entfernt man diese Kanten aus G , so reduziert sich der Grad jedes ungeraden Knotens um 1, und alle Knoten haben dann geraden Grad – der resultierende Graph ist eulerisch. Umgekehrt, wenn G durch Entfernen von k Kanten eulerisch wird, betrachten wir den Teilgraphen G' , der aus diesen k Kanten besteht. Für jedes $i \in [2k]$ muss der Grad von u_i in G' ungerade sein (man muss eine ungerade Anzahl an Kanten entfernen, um den Grad in G gerade zu machen). Da jede ungerade Zahl mindestens 1 ist und nur k Kanten existieren, hat jeder u_i in G' Grad genau 1. Also besteht G' aus isolierten Kanten: ein perfektes Matching in G_{odd} .
N.B.: k ist die minimale Anzahl an Kanten, die entfernt werden müssen, um G eulerisch zu machen. Falls man mehr als k Kanten entfernen darf, genügt es, dass der induzierte Teilgraph G_{odd} keinen Knoten geraden Grades hat – dies ist allerdings deutlich schwieriger zu überprüfen.

Aufgabe 5

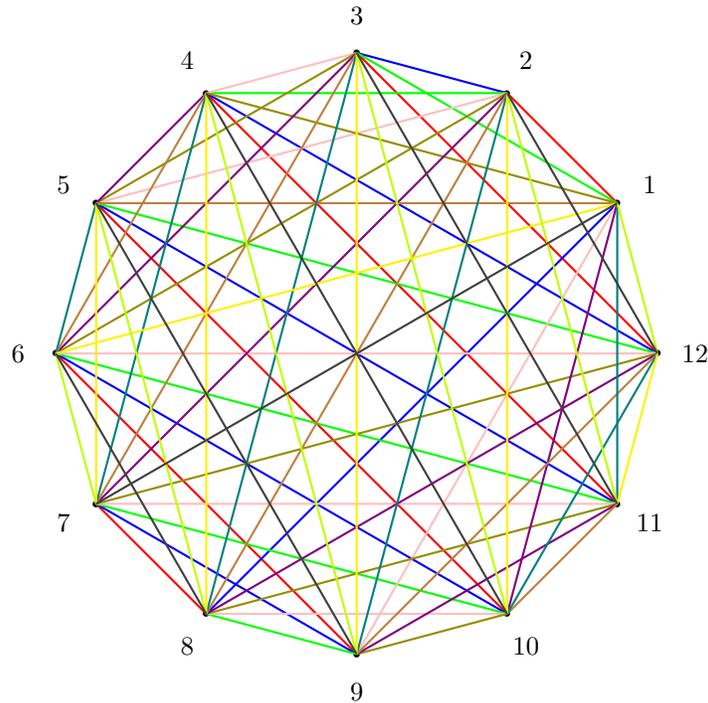
[Bonus – Organisation eines Schulausflugs]

Ein Tag des Händchenhaltens zu zweit entspricht einem vollständigen Matching

im vollständigen Graphen mit 12 Knoten. Daher werden $\frac{12}{2} = 6$ Kanten verwendet. Im vollständigen Graphen gibt es $\binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2} = 66$ Kanten. Daher könnte es höchstens $\frac{66}{6} = 11$ vollständige Matchings geben: Unser Ausflug kann nicht länger als 11 Tage dauern (im Allgemeinen für eine gerade Anzahl von Kindern n kann er nicht länger als $\frac{2}{n} \binom{n}{2} = n - 1$ Tage dauern).

Es bleibt zu beweisen, dass wir tatsächlich 11 disjunkte vollständige Matchings in K_{12} finden können. Hier ist ein Beispiel (jedes vollständige Matching besteht aus 6 Kanten):

1 – 2	3 – 12	4 – 11	5 – 10	6 – 9	7 – 8
2 – 3	12 – 4	11 – 5	10 – 6	9 – 7	8 – 1
1 – 3	4 – 2	5 – 12	6 – 11	7 – 10	8 – 9
3 – 4	2 – 5	12 – 6	11 – 7	10 – 8	9 – 1
1 – 4	5 – 3	6 – 2	7 – 12	8 – 11	9 – 10
4 – 5	3 – 6	2 – 7	12 – 8	11 – 9	10 – 1
1 – 5	6 – 4	7 – 3	8 – 2	9 – 12	10 – 11
5 – 6	4 – 7	3 – 8	2 – 9	12 – 10	11 – 1
1 – 6	7 – 5	8 – 4	9 – 3	10 – 2	11 – 12
6 – 7	5 – 8	4 – 9	3 – 10	2 – 11	12 – 1
1 – 7	2 – 12	3 – 11	4 – 10	5 – 9	6 – 8



Wenn der Spaziergang in Reihen zu je drei Personen erfolgt, gibt es 4 Reihen, und jeden Tag verwenden Sie $3 \times 4 = 12$ Kanten von K_{12} . Daher kann Ihre Reise

höchstens $\lfloor \frac{66}{12} \rfloor = 5$ Tage dauern. Viel Glück bei der Suche nach einer Lösung (schreiben Sie mir eine korrekte Lösung, und ich werde sie hier hinzufügen)!

Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

Es gibt nur $2^3 = 8$ Graphen mit 3 Knoten...

Aufgabe 7

[Anzahl der perfekten Matchings]

Aufgabe 8

[Adjazenzmatrix – noch einmal]

Was verstanden werden muss, ist die Wirkung, die die Adjazenzmatrix A auf den Graphen hat. Zunächst ist ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+m}$ nur eine Gewichtung der Knoten (d. h. man kann den Graphen zeichnen und die Koordinaten von \mathbf{v} direkt auf den Knoten schreiben), und $A\mathbf{v}$ ist ebenfalls ein Vektor: Der Wert von $A\mathbf{v}$ an einem Knoten u ist die Summe der Werte von \mathbf{v} an den Nachbarn von u .

1. Nehmen Sie $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit den Koordinaten $x_{a_1}^i = 1$ und $x_{a_i}^i = -1$ für $i \neq 1$, und $v_\alpha = 0$, wenn $\alpha \notin \{a_1, a_i\}$ (insbesondere wenn $\alpha = b_j$). Dann gilt $A_{n,m}\mathbf{x}^i = \mathbf{0}$. Dies funktioniert für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, und symmetrisch, für \mathbf{y}^j mit $y_{b_1}^j = -y_{b_j}^j = 1$ und sonst 0, für $j \in \{1, \dots, m\}$. Wir erhalten $(n-1) + (m-1)$ Vektoren im Kern von A . All diese Vektoren sind linear unabhängig, weil sie echelonisiert sind (schreiben Sie \mathbf{x}^i und \mathbf{y}^j als Spalten einer Matrix: es gibt eine Identitätsmatrix mit vollem Rang darin).
2. Der Graph $K_{n,n}$ ist regulär, also nehmen Sie $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n}$ mit $z_{a_i} = z_{b_j} = 1$, dann gilt $A\mathbf{z} = n\mathbf{z}$. Nehmen Sie $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{2n}$ mit $t_{a_i} = 1$ und $t_{b_j} = -1$, dann gilt $A\mathbf{t} = -n\mathbf{t}$. Das Spektrum von $A_{n,n}$ ist $\{-n, 0, +n\}$, die Eigenwerte n und $-n$ haben die Vielfachheit 1 (ihre Eigenvektoren sind jeweils \mathbf{z} und \mathbf{t}), und der Eigenwert 0 hat die Vielfachheit $2n-2$ (eine Eigenbasis seines Eigenraums wird durch die Vektoren \mathbf{x}^i und \mathbf{y}^j für $i \in \{1, \dots, n\}$ gegeben). Da wir eine Gesamtvielfachheit von $1+1+(2n-2) = 2n$ gefunden haben, was der Größe der Matrix $A_{n,n}$ entspricht, haben wir eine Diagonalisierung.
3. Die Koordinate von $A\mathbf{v}$ am Knoten a_i ist die Summe der Koordinaten von \mathbf{v} an den Nachbarn von a_i . Da $K_{n,m}$ vollständig ist, sind die Nachbarn von a_i (b_1, \dots, b_m), was nicht von i abhängt. Daher hängt die Koordinate von $A\mathbf{v}$ am Knoten a_i nicht von i ab: Sie ist $\sum_j v_{b_j}$.
4. Wenn $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+m}$ ein Eigenvektor von $A_{n,m}$ ist, der mit einem von Null verschiedenen Eigenwert verbunden ist, dann gilt $A_{n,m}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ für einige $\lambda \neq 0$. Insbesondere sind alle Koordinaten von $A_{n,m}\mathbf{v}$ an den Knoten a_i gleich (gemäß der vorherigen Frage), also da $\lambda \neq 0$, sind alle Koordinaten von \mathbf{v} an a_i gleich: Wir bezeichnen sie mit α . Ebenso sind alle Koordinaten von \mathbf{v} an b_j gleich: Wir bezeichnen sie mit β . Wenn wir die Koordinate von a_1 in der Gleichung $A_{n,m}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ betrachten, erhalten wir $m\beta = \lambda\alpha$;

während wir die Koordinate von b_1 betrachten, erhalten wir $n\alpha = \lambda\beta$ (denke daran, dass wir versuchen herauszufinden, ob λ, α und β existieren können, während n und m fest sind und $n \neq m, \lambda \neq 0$). Wenn $\alpha = 0$, dann gilt $\lambda\beta = 0$, was nicht möglich ist ($\lambda \neq 0$ nach Annahme, und wenn $\beta = 0$, dann wäre $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, aber \mathbf{v} ist ein Eigenvektor). Also gilt $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}m$, also ergibt sich aus $n\alpha = \lambda\beta$ die Gleichung $\frac{n}{m} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$. Schließlich kann man überprüfen, dass die Wahl von $(\alpha, \beta) = (+\sqrt{n}, +\sqrt{m})$ oder $(\alpha, \beta) = (-\sqrt{n}, +\sqrt{m})$ zwei verschiedene (und linear unabhängige) Eigenvektoren mit Eigenwert $\lambda = \sqrt{nm}$ liefert. Die Matrix $A_{n,m}$ ist diagonalisierbar, da wir Eigenwerte mit einer Gesamtvielfachheit von $2n$, der Größe der Matrix, gefunden haben.

Diskrete Mathematik – Sommersemester 2025

Übungsblatt 4

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden. Die Bonusübung kann bis zu +5 Bonuspunkte geben (daher sollte man sie nicht zu seiner Priorität machen).

Aufgabe 1

[Hamiltonische Graphen]

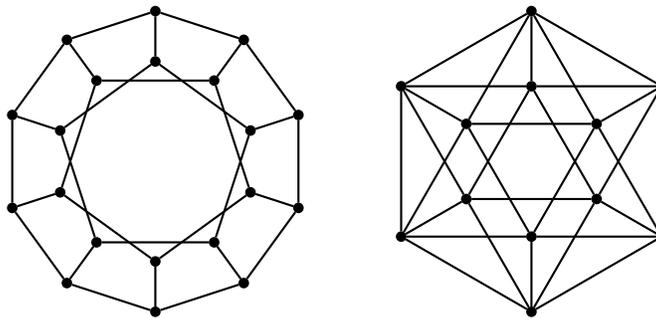


Abbildung 7: The dodecahedral graph and the icosahedral graph.

1. Im Jahr 1857, erfand Sir William Rowan Hamilton das Spiel „The Icosian Game“. Die Aufgabenstellung war es, einen Hamiltonkreis des Graphen G in Figure 7 zu finden. Zeigen Sie, dass der Graph G einen Hamiltonkreis besitzt.
2. Sei Q_n der Hyperwürfelgraph. Entscheiden Sie, für welche n der Graph Q_n eulersch ist. Entscheiden Sie, für welche n der Graph Q_n hamiltonsch ist. Erinnern Sie sich daran: Der Hyperwürfelgraph Q_n hat Knoten, die alle Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ sind, und die Kanten verlaufen zwischen X und Y , wenn $X \subseteq Y$ und $|Y| = |X|+1$.

Aufgabe 2

[Satz von Ore und Satz von Dirac]

1. Konstruieren Sie einen Graphen $G = ([5], E)$ mit $d(i) \geq 2$ für alle $i \in [5]$, der keinen Hamiltonkreis enthält.
2. Konstruieren Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ einen Graphen mit n Knoten und $1 + \binom{n-1}{2}$ vielen Kanten, der nicht hamiltonsch ist.
3. Konstruieren Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ einen Graphen mit n Knoten und Minimalgrad $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$, der nicht hamiltonsch ist.

Aufgabe 3

[Ore's Theorem]

Wir möchten den folgenden Satz beweisen (Ore, 1960): *Wenn für alle nicht benachbarten Knoten u und w von G gilt, dass $d(u) + d(w) \geq n$, dann ist G hamiltonisch*, wobei $d(u)$ den Grad von u in G darstellt.

1. Beweisen Sie, dass die Umkehrung des Ore'schen Satzes falsch ist. Hinweis: 5 Knoten reichen aus.
2. Schreiben Sie die Kontraposition des Ore'schen Satzes auf. Dies ist das, was wir beweisen werden.
3. Sei $H = (V, E)$ ein maximal nicht-hamiltonscher Graph mit n Knoten (d.h. das Hinzufügen einer Kante zu H würde einen hamiltonschen Kreis erzeugen).
 - (a) Wenn u und w in H nicht benachbart sind, beweisen Sie, dass es einen hamiltonschen Pfad (v_1, \dots, v_n) mit $v_1 = u$ und $v_n = w$ gibt.
 - (b) Für $i \in \{2, \dots, n-2\}$ beweisen Sie, dass wenn $wv_{i+1} \in E$, dann $v_i w \notin E$.
 - (c) Folgern Sie, dass $d(u) + d(w) \leq n-1$.
4. Beweisen Sie den Ore'schen Satz (indem Sie seine Kontraposition beweisen): Nehmen Sie G und fügen Sie Kanten hinzu, um einen maximal nicht-hamiltonschen Graphen H zu erhalten, und ziehen Sie einen Schluss.

Aufgabe 4

[Chinesisches Postbotenproblem]

Kwan Mei-Ko stellte 1960 folgendes Problem: *In der Stadt Guan muss ein Postbote Briefe an Bürger in jeder Straße zustellen; wie kann die Anzahl der Straßen minimiert werden, die er zweimal passieren muss?* (Dies ist keine wörtliche, sondern eine umformulierte Wiedergabe). Eine Stadt kann als Graph betrachtet werden, dessen Knoten die Kreuzungen sind (Kreuzungen zwischen Straßen, Sackgassen werden nicht berücksichtigt), und die Kanten sind zwischen den Kreuzungen, die zur gleichen Straße gehören. Der Postbote stellt die Briefe zustellt, indem er einen Pfad (in diesem Graphen) folgt, der zu seinem Ausgangspunkt zurückkehrt.

1. Eine Stadt ist *eine US-Stadt*, wenn sich jede zwei sich kreuzende Straßen unter einem Winkel von 90° treffen und es keine Sackgassen gibt. Zeigen Sie, dass in US-Städten der Postbote keine Straße zweimal passieren muss.
2. Angenommen, die Stadt Osnabrück hat nur 2 Kreuzungen ungeraden Grades in ihrem Graphen $G = (V, E)$, nämlich u und v . Sei d die Entfernung zwischen u und v . Zeigen Sie, dass der Postbote die Briefe durch zweimaliges Benutzen von höchstens k Kanten mit $k \leq d$ zustellen kann.
3. Wir möchten zeigen, dass $k = d$ in Osnabrück ist. Betrachten Sie einen möglichen Pfad des Postboten, sei E' die Kanten, die er zweimal benutzt, und $G' = (V, E')$ der resultierende Teilgraph.
 - (a) Zeigen Sie, dass für jedes $w \in V$ mit $w \notin \{u, v\}$ der Grad $d'(w)$ von w in G' gerade ist.
 - (b) Nehmen Sie an, dass u und v nicht in der gleichen zusammenhängenden Komponente von G' sind, und führen Sie einen Widerspruch mit der Gradformel herbei.
 - (c) Schlussfolgern Sie, dass $|E'| \geq d$ und ziehen Sie einen Schluss.

Aufgabe 5

[Bonus – Schach spielen]

Kann ein Turm alle Felder eines 8×8 Schachbretts genau einmal durchlaufen und zu seinem Startpunkt zurückkehren? Wenn ja, zeichnen Sie, wie das geht.

Können der König oder die Dame dies tun? Kann ein Läufer, der auf einem schwarzen Feld beginnt, genau einmal alle schwarzen Felder durchlaufen? Kann ein Springer alle Felder eines 5×5 Schachbretts genau einmal durchlaufen und zu seinem Startpunkt zurückkehren?

Abgabe: 21.05.2024 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):

“ Wir konstruieren einen einfachen Graphen G mit $n = 6$ Knoten, sodass:

- G besitzt **keinen Hamiltonkreis**,
- G besitzt zwei **nicht-adjazente Knoten** u, v mit $\deg(u) + \deg(v) \geq 6$,
- G besitzt die **minimal mögliche Anzahl an Kanten** unter allen solchen Graphen.

Konstruktion Der Graph besitzt 6 Knoten und 7 Kanten. Die Kanten sind:

$$\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}$$

Die Knoten 2 und 5 sind nicht adjazent und erfüllen $\deg(2) = 3$, $\deg(5) = 3$, also ist die Summe der Grade gleich 6.

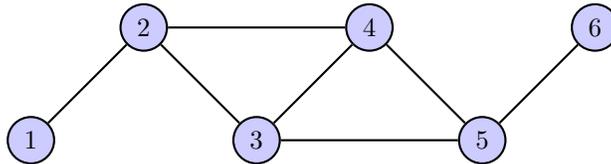


Abbildung 8: Ein Graph ohne Hamiltonkreis mit $\deg(2) + \deg(5) = 6$

Begründung Der Graph enthält keinen Hamiltonkreis: Jeder Versuch, alle Knoten in einem Kreis zu verbinden, scheitert aufgrund von erzwungenem Zurückgehen oder doppeltem Besuch eines Knotens.

Außerdem erfüllen die nicht-adjazenten Knoten (2, 5) die Gradbedingung: $\deg(2) + \deg(5) = 3 + 3 = 6 = n$.

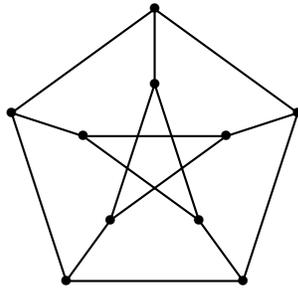
Der Graph hat nur 7 Kanten, was minimal ist unter allen Graphen mit dieser Eigenschaft. ”

Das ist falsch, erklären Sie mir, warum.

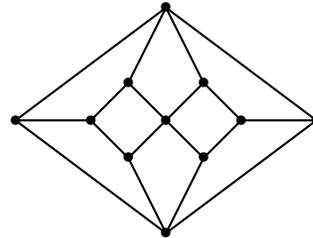
Aufgabe 7

[Wer ist Hamiltonisch?]

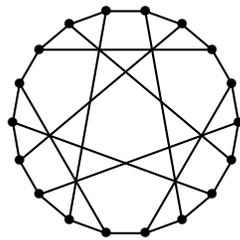
Welcher der folgenden Graphen ist hamiltonsch, welcher ist eulerisch, welcher hat einen hamiltonschen Pfad, welcher hat einen eulerischen Pfad?



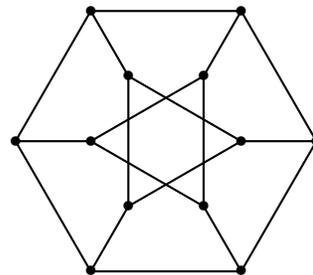
Petersen graph



Herschel graph



Pappus graph



Dürer graph

Aufgabe 8

[Eulerisch vs. Hamiltonisch]

Für jeden der folgenden Sätze geben Sie ein Beispiel an oder zeigen Sie, dass ein solcher Graph nicht existieren kann:

1. Ein Graph, der Eulerisch, aber nicht Hamiltonisch ist.
2. Ein Graph, der Hamiltonisch, aber nicht Eulerisch ist.
3. Ein Graph, der einen Eulerpfad, aber keinen Hamiltonpfad hat.
4. Ein Graph, der einen Hamiltonpfad, aber keinen Eulerpfad hat.
5. Ein Hamiltonischer Graph mit mindestens 3 Knoten und einer Brücke.
6. Ein Graph mit mindestens 3 Knoten, einer Brücke und einem Hamiltonpfad.

Aufgabe 9

[Liniengraph]

Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist sein *Liniengraph* $L(G)$ der Graph, dessen Knotenmenge E ist und dessen Kanten zwischen Kanten von G sind, die einen gemeinsamen Knoten haben.

1. Zeichnen Sie für einige Graphen Ihrer Wahl den entsprechenden Liniengraphen (z. B. Pfad, Zyklen, vollständiger Graph, bipartiter vollständiger Graph usw.). Finde einen Graphen G , so dass $G \neq L(L(G))$, und einen Graphen G mit $L(G) = G$.
2. Zeigen Sie, dass wenn G Eulerisch ist, dann $L(G)$ Hamiltonisch ist.

3. Für eine Kante uv von G sei e_{uv} der entsprechende Knoten von $L(G)$. Drücken Sie $d_{L(G)}(e_{uv})$ in Abhängigkeit von $d_G(u)$ und $d_G(v)$ aus. Erinnerung: $d_H(x)$ ist der Grad im Graphen H des Knotens x .
4. Zeigen Sie, dass wenn G Eulerisch ist, dann $L(G)$ auch Eulerisch ist.
5. Geben Sie ein Beispiel für einen Graphen G an, der weder Hamiltonisch noch Eulerisch ist, für den aber $L(G)$ Eulerisch ist.

Discrete Mathematics – Loesungblatt 4

Aufgabe 1

[Hamiltonische Graphen]

1. In Abbildung Figure 9 ist ein Hamiltonkreis in beiden Graphen dargestellt.

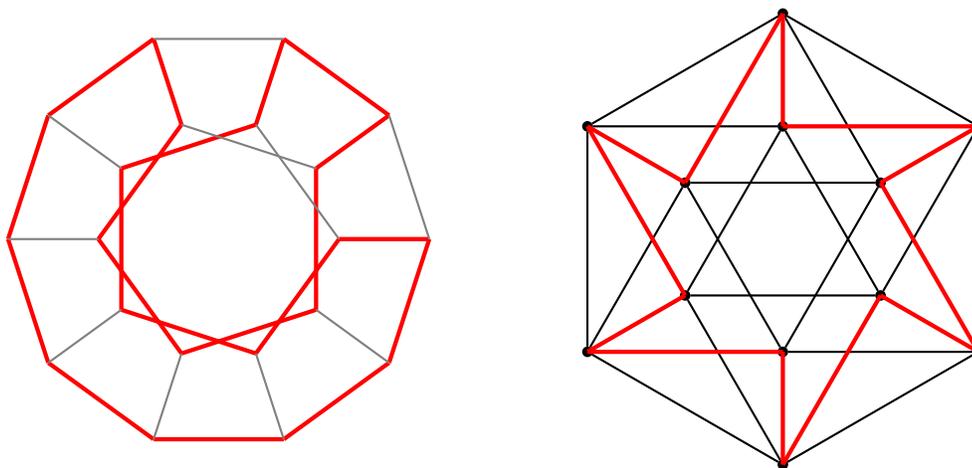


Abbildung 9: Exercise 1(i)

2. (i) Der Hyperwürfel $Q_n = (V, E)$ hat die Knotenmenge $V = \{(u_1, \dots, u_n) : u_i \in \{0, 1\}\}$ und uv ist eine Kante, falls sich u und v genau an einer Stelle unterscheiden. Deswegen es gilt für $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$

$$N(v) = \{(\tilde{v}_1, v_2, \dots, v_n), (v_1, \tilde{v}_2, v_3, \dots, v_n), \dots, (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, \tilde{v}_n)\},$$

with

$$\tilde{v}_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } v_i = 0 \\ 0, & \text{falls } v_i = 1 \end{cases}.$$

Insbesondere es gilt $d(v) = n$ für alle $v \in V$. Aus Satz 6.2 folgt, dass ein zusammenhängender Graph G eulersch ist genau dann wenn jeder Knoten von G geraden Grad hat. Deshalb ist Q_n eulersch genau dann wenn n gerade ist.

- (ii) Der Hyperwürfel $Q_n = (V, E)$ ist hamiltonsch für jede $n \geq 2$. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion. Da Q_2 der Kreis mit 4 Knoten ist, es gilt der Fall $n = 2$. Sei $n \geq 3$. Angenommen Q_{n-1} ist hamiltonsch. Wir teilen die Menge $V(Q_n) = V_1 \uplus V_2$ in zwei disjunkte Mengen $V_0 := \{(u_1, \dots, u_n) : u_i \in \{0, 1\}, u_n = 0\}$ und

$V_1 := \{(u_1, \dots, u_n) : u_i \in \{0, 1\}, u_n = 1\}$. Wir beachten, dass die induzierten Graphen $G_1 = (V_1, E \cap \binom{V_1}{2})$ und $G_2(V_2, E \cap \binom{V_2}{2})$ isomorph zu Q_{n-1} sind.

Nach Induktionvoraussetzung besitzt G_1 ein Hamiltonkreis

$$H_1 = x_1 x_2 \dots x_{m-1} x_m x_1,$$

und G_2 besitzt ein Hamiltonkreis

$$H_2 = y_1 \dots y_{m-1} y_m y_1,$$

mit $x_i = (v_1, \dots, v_{n-1}, 0)$ und $y_i = (v_1, \dots, v_{n-1}, 1)$ für alle $i = 1, \dots, m$. (Hier $m = 2^{n-1}$, aber wir brauchen das nicht.). Insbesondere ist $x_i y_i \in E$ für alle $i = 1, \dots, m$. Deshalb ist

$$x_1 x_2 \dots x_{m-1} x_m y_m y_{m-1} \dots y_1 x_1$$

ein Hamiltonkreis von Q_n .

Aufgabe 2

[Mit Satz von Dirac]

1. Variante 1: Wir stellen fest, dass ein Graph mit Artikulation keinen Hamiltonkreis besitzt. Abbildung 10 zeigt den einzigen solchen Graphen, der die gegebenen Voraussetzungen erfüllt.

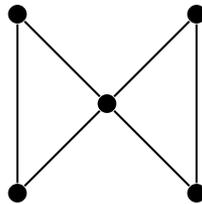


Abbildung 10: Aufgabe 1(ii), Var. 1

Variante 2: Wir stellen fest, dass $6 \leq |E| \leq 10$ gilt ($|E| = 5$ gibt $G = C_5$; Kreise sind hamiltonisch, $|E| < 5$ und Minimalgrad 2 geht nicht).

Wir betrachten $|E| = 6$, dann gilt $\sum_{i=1}^5 d(i) = 12$. Es sind also folgende Fälle möglich:

- a) Es gibt einen Grad 4 Knoten und 4 von Grad 2,
- b) Es gibt 2 Grad 3 Knoten und 3 von Grad 2.

a) führt zu dem Graphen aus Variante 1.

In Fall b) überlegen wir uns, dass die Grad 3 Knoten nicht benachbart sein können (sonst gibt es einen Hamilton Kreis). Somit bleibt der Graph in Abbildung 11. Es ist leicht zu sehen, dass dieser keinen Hamilton Kreis enthält.

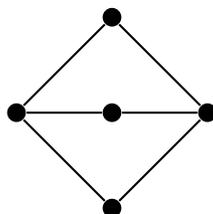


Abbildung 11: Aufgabe 1(ii), Var. 2

2. Sei G der vollständige K_{n-1} , zu dem ein zusätzlicher Knoten v hinzugefügt wird, der zu genau einem Knoten des K_{n-1} verbunden ist. Dann hat G genau $\binom{n-1}{2} + 1$ Kanten. Da v auf keinem Kreis liegt, besitzt G keinen Hamiltonkreis.
3. Sei G_1 ein vollständiger Graph auf $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ Knoten und sei G_2 ein vollständiger Graph auf $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Knoten, der von G_1 disjunkt ist. Sei $u \in V(G_1)$ ein Knoten, der zu allen Knoten in G_2 verbunden wird. Der entstandene Graph hat Minimalgrad $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ und ist nicht hamiltonsch, da mindestens 4 zu u inzidente Kanten verwendet werden müssten.

Aufgabe 3

[Satz von Ore]

1. Der Zyklus der Länge $n = 5$ ist Hamiltonisch, aber für zwei nicht benachbarte Knoten u und v haben wir $d(u) + d(v) = 4 < n$. Daher ist die Umkehrung falsch.
2. Die Kontraposition von Ores Theorem lautet: *Wenn G nicht Hamiltonisch ist, dann gibt es zwei nicht benachbarte Knoten u und v , so dass $d(u) + d(v) \leq n - 1$.*
3. (a) Da H maximal nicht-Hamiltonisch ist, führt das Hinzufügen einer Kante zu einem Hamiltonischen Zyklus. Das Hinzufügen der Kante uw erzeugt daher einen Hamiltonischen Zyklus $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ mit $v_1 = u$ und $v_n = w$. Das Entfernen der Kante uw ergibt einen Hamiltonischen Pfad in H : (v_1, v_2, \dots, v_n) mit $v_1 = u$ und $v_n = w$.
 (b) Nehmen wir an, sowohl uv_{i+1} als auch wv_i Kanten in H sind. Eine schnelle Skizze (bitte, machen Sie die Skizze!) zeigt, dass $(u, v_2, \dots, v_i, w, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}, u)$ ein Hamiltonischer Zyklus in H ist. Da wir wissen, dass H nicht Hamiltonisch ist, existiert eine der Kanten uv_{i+1} oder wv_i nicht.
 (c) Gemäß der vorherigen Frage: (die Gesamtzahl der Kanten der Form uv_i für $i \in 3, \dots, n - 1$) + (die Gesamtzahl der Kanten der Form wv_{i+1} für $i \in 2, \dots, n - 2$) ist höchstens $\#\{2, \dots, n - 2\} = n - 3$. Unter Berücksichtigung der Kanten uv_1 und wv_{n-1} (und unter Berücksichtigung, dass es keine Kante zwischen u und w gibt), erhalten wir $d(u) + d(w) \leq n - 1$.

4. Da wir Kanten in G hinzugefügt haben, um H zu erhalten, ist der Grad $d_G(v)$ eines Knotens v in G kleiner als sein Grad $d_H(v)$ in H , d.h. $d_G(v) \leq d_H(v)$. Gemäß der vorherigen Frage existieren zwei nicht benachbarte Knoten u und w in H (was impliziert, dass sie auch nicht benachbart in G sind), so dass $d_H(u) + d_H(w) \leq n - 1$. Folglich gilt $d_G(u) + d_G(w) \leq d_H(u) + d_H(w) \leq n - 1$. Dies beweist, dass Ores Theorem gilt, da dies seine Kontraposition ist.

Aufgabe 4

[Chinesisches Postmannproblem]

1. In einer US-Stadt haben alle Knoten einen Grad von 4 (weil genau 4 Straßen an einem Kreuzungspunkt zusammentreffen, da sie sich im 90° -Winkel treffen). Somit haben alle Knoten des Graphen einen geraden Grad, was impliziert, dass es einen Eulerkreis gibt (siehe Vorlesung): Wenn der Postbote diesem Eulerkreis folgt, kann er die Post in allen Straßen zustellen, ohne zweimal durch dieselbe Straße zu gehen.
2. Gemäß dem Satz aus der Vorlesung gibt es in der Stadt Osnabrück einen Eulerpfad, der bei u beginnt und bei v endet. Darüber hinaus existiert nach Definition ein Pfad \mathcal{P} der Länge d von u nach v . Wenn der Postbote dem Eulerpfad folgt und dann dem Pfad \mathcal{P} , wird er jede Straße besuchen und dann zu seinem Ausgangspunkt zurückkehren, indem er genau d Straßen ein zweites Mal besucht. Also ist die minimale Anzahl von Straßen, die er zweimal besuchen muss, höchstens d .
3. (a) In dem Pfad, dem der Postbote folgt, verlässt er jedes Mal einen Knoten w , wenn er diesen betritt. Daher ist die Anzahl der Male, die der Postbote durch eine Straße geht, die an den Knoten w angrenzt, gerade. Diese Anzahl ist $d(w) + d'(w)$, die Summe des Grades von w in G und seines Grades in G' . Daher ist bis auf u und v der Grad aller Knoten von G' gerade (weil er auch gerade in G ist).
 (b) Gemäß der Gradformel: $2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$ für einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$. Folglich ist die Anzahl der Knoten ungeraden Grades in einem zusammenhängenden Graphen (oder in jeder zusammenhängenden Komponente eines Graphen) gerade. Da u und v die einzigen Knoten von G' sind, können sie nicht in verschiedenen zusammenhängenden Komponenten sein (sonst hätte jede ihrer zusammenhängenden Komponenten genau 1 Knoten ungeraden Grades, und 1 ist nicht gerade!).
 (c) Da u und v in derselben zusammenhängenden Komponente von G' sind, gibt es einen Pfad, der sie verbindet. Die Länge dieses Pfades ist $\geq d$, weil es auch ein Pfad in G ist (insbesondere ist er länger als der *kürzeste* Pfad zwischen u und v in G). Daher ist die Anzahl der Kanten von G' größer als d , d.h. $|E'| \geq d$. Schließlich kann der Postbote alle Briefe zustellen, indem er genau d Kanten zweimal verwendet, und was auch immer er tut, er kann nicht weniger verwenden.

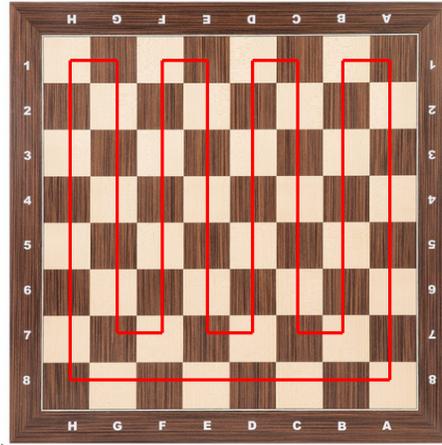


Abbildung 12: Hamiltonian cycle für Turm, König und Dame.

Hinweis: Wenn Ihre Lieblingsstadt mehr als 2 Knoten ungeraden Grades hat, muss man alle möglichen Kanten zwischen den Knoten ungeraden Grades betrachten und für jede berechnen, wie viele Kanten wiederholt werden müssen, wenn der Postbote zwischen den entsprechenden Knoten geht.

Aufgabe 5

[Bonus – Schach spielen]

Diese Fragen drehen sich darum, einen Hamiltonkreis auf bestimmten Graphen zu finden. Der Graph, der einem Schachspielstück zugeordnet ist, hat als Knoten die Felder des Schachbretts und Kanten zwischen den Feldern, die das Stück erreichen kann, ohne über ein anderes Feld zu gehen.

Beginnen wir mit dem Einfachsten: Der Läufer kann es nicht schaffen, wegen der Ecken (die Isthmen des Graphen der Felder, die er erreichen kann).

Der Turm, die Dame und der König können es schaffen, weil ihr Graph ein Gitter enthält, siehe Figure 12.

Der Springer kann es auf einem 5×5 Schachbrett nicht schaffen. Bei jedem Zug ändert sich die Farbe des Feldes, auf dem sich der Springer befindet. Folglich, wenn der Springer auf einem weißen Feld startet, wird er nach einer ungeraden Anzahl von Zügen auf einem schwarzen Feld landen. Es gibt 25 Felder zu durchlaufen, also 25 Züge zu machen: Ein Springer kann nicht auf demselben Feld enden, auf dem er gestartet ist, weil seine Start- und Endfelder unterschiedliche Farben haben.

Der Springer kann es jedoch auf einem 8×8 Schachbrett schaffen, und auch auf vielen anderen Schachbrettern, siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Knight%27s_tour.

Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

Entfernt man die Kante 3–4, so erhält man einen Graphen mit weniger Kanten,

der weiterhin keinen Hamiltonkreis besitzt (da der Knoten 6 nun Grad 1 hat), und es gilt weiterhin $\deg(2) + \deg(5) = 6$.

Dieser neue Graph hat 6 Kanten, was tatsächlich minimal ist: Da $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ gefordert ist und u und v nicht adjazent sind, gibt es mindestens $\deg(u) + \deg(v)$ Kanten (also in unserem Fall mindestens 6).

Aufgabe 7

[Wer ist Hamiltonisch?]

	Petersen	Herschel	Pappus	Dürer
Hamiltonisch	✗	✗	✓	✓
Hamiltonischer Pfad	✓	✓	✓	✓
Eulerisch	✗	✗	✗	✗
Eulerischer Pfad	✗	✗	✗	✗

Für (Pfad-) Eulerisch: Jeder Graph hat mehr als 3 Knoten ungeraden Grades.

Für Hamiltonisch: Schauen Sie auf die Wikipedia-Seite jedes Graphen.

Aufgabe 8

[Eulerisch vs. Hamiltonisch]

1. Nehmen Sie zwei Dreiecke, die an einem gemeinsamen Knoten verklebt sind (5 Knoten, 6 Kanten): Es ist Eulerisch, aber nicht Hamiltonisch.
2. Sie haben 2 Beispiele in der vorherigen Aufgabe.
3. Nehmen Sie drei Dreiecke K_3 auf $\{1, 2, 3\}$, auf $\{a, b, c\}$ und auf $\{x, y, z\}$ und fügen Sie zwei Kanten $1-a$ und $a-x$ hinzu (9 Eckpunkte, 11 Kanten): Es handelt sich um einen eulerschen Pfad, aber nicht um einen hamiltonschen Pfad.
4. Sie haben 4 Beispiele in der vorherigen Aufgabe.
5. Unmöglich, siehe die Vorlesungsunterlagen.
6. Nehmen Sie $G = P_n$ einen Pfad mit n Knoten: Er hat $n - 1$ Brücken und dennoch einen Hamiltonischen Pfad (den Pfad selbst).

Aufgabe 9

[Liniengraph]

1. Nehmen Sie $G = P_3$, den Pfad auf 3 Knoten. Er hat 2 Kanten, und $L(P_3)$ hat 2 Knoten und 1 Kante, daher hat $L(L(P_3))$ 1 Knoten und keine Kante. Folglich gilt $P_3 \neq L(L(P_3))$. Für $G = K_3$ haben wir $L(K_3) = K_3$.
2. Nach Definition ist ein Eulerkreis in G ein Kreis, der genau einmal durch jede Kante von G führt (und zum ersten Anfang zurückkehrt), so dass aufeinanderfolgende Kanten einen Knoten gemeinsam haben. Daher entspricht das Folgen eines Eulerkreises dem Folgen eines Kreises im Liniengraphen $L(G)$, der durch jede Kante von G führt, also durch jeden Knoten von $L(G)$ genau einmal.

3. e_{uv} ist genau dann benachbart zu den Kanten der Form e_{uw} für w ein Nachbar von u in G (mit $w \neq v$), und zu e_{vw} für w ein Nachbar von v in G (mit $w \neq u$). Daher gilt $d_{L(G)}(e_{uv}) = (d_G(u) - 1) + (d_G(v) - 1) = d_G(u) + d_G(v) - 2$.
4. Wenn G Eulerisch ist, dann ist $d_G(u)$ für jeden Knoten u von G gerade. Daher ist $d_{L(G)}(e_{uv}) = d_G(u) + d_G(v) - 2$ für alle $uv \in E$ gerade. Somit ist $L(G)$ Eulerisch, da alle seine Knoten gerade Grad haben.
5. $K_{1,3}$, der Stern mit 1 Knoten in der Mitte, der mit anderen 3 Knoten verbunden ist, ist weder Eulerisch noch Hamiltonisch. $L(K_{1,3}) = K_3$ ist der vollständige Graph auf 3 Knoten: Er ist sowohl Eulerisch als auch Hamiltonisch.

Diskrete Mathematik – Sommersemester 2025

Übungsblatt 5

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden. Die Bonusübung kann bis zu +5 Bonuspunkte geben (daher sollte man sie nicht zu seiner Priorität machen).

Aufgabe 1

[2-Zusammenhang]

Sei $G = (V, E)$ ein minimal 2-zusammenhängender Graph, d.h. G ist 2-zusammenhängend und für jede Kante $e \in E$ ist $G \setminus e = (V, E \setminus \{e\})$ nicht 2-zusammenhängend.

1. Zeigen Sie, dass in einem 2-zusammenhängenden Graphen jede Kante in einem Kreis enthalten ist.
2. Zeigen Sie, dass ein minimal 2-zusammenhängender Graph G einen Knoten vom Grad 2 hat.
3. Zeigen Sie, dass jeder 2-zusammenhängende Teilgraph H eines minimal 2-zusammenhängenden Graphen G ebenfalls minimal 2-zusammenhängend ist.

Aufgabe 2

[Kanten- und Knotenzusammenhang]

Erinnerung: Ein Graph $G = (V, E)$ heißt ℓ -kantenzusammenhängend, falls

- $|V| > 1$,
- $G \setminus F$ ist zusammenhängend für alle $F \subseteq E$ mit $|F| < \ell$.

Es bezeichne $\lambda(G) = \max\{\ell : G \text{ ist } \ell\text{-kantenzusammenhängend}\}$ die *Kantenzusammenhangszahl* von G .

1. Zeigen Sie, dass $\kappa(G) \leq \lambda(G)$. (Hinweis: Ein möglicher Ansatz besteht darin, Induktion auf $\lambda(G)$ anzuwenden.)
2. Finden Sie einen Graphen mit $\kappa(G) < \lambda(G) < \Delta(G)$. (Erinnerung: $\Delta(G)$ ist das Maximum der Grade der Knoten von G .)

Aufgabe 3

[Graph toughness]

Für festes t heißt ein Graph G t -tough, falls er, für jedes $k > 1$, durch das Entfernen von unbedingt weniger als tk Knoten nicht in k Zusammenhangskomponenten zerfällt. Die *Toughness* $\tau(G)$ eines Graphen G ist das Maximum (oder genauer gesagt das Supremum) von t , für das G t -tough ist¹.

1. Was ist die Toughness des Pfades P_n ?
2. Was ist die Toughness des Kreises C_n ?
3. Zeigen Sie, dass wenn G nicht der vollständige Graph ist, dann $\tau(G) \leq \Delta(G)$.

¹Toughness = Zähigkeit

4. Zeigen Sie, dass wenn ein aufspannender Teilgraph H von G t -tough ist, dann ist auch G t -tough. Folgern Sie, dass $\tau(G) \geq \max_H \tau(H)$, wobei das Maximum über alle aufspannenden Teilgraphen H von G genommen wird. Finden Sie ein Beispiel, bei dem $\tau(G) \neq \max_H \tau(H)$.
5. Zeigen Sie, dass wenn G Hamiltonsch ist, dann ist G 1-tough.
6. Zeigen Sie, dass wenn G t -tough ist, dann ist G auch $2t$ -knoten-konnektiv.

Aufgabe 4

[Blöcke und Schnittpunkte]

Ein *Schnittpunkt* in einem zusammenhängenden Graphen G ist ein Knoten v , dessen Entfernung G trennt. Ein *Block* in einem zusammenhängenden Graphen G ist ein maximaler induzierter Teilgraph von G (mit mindestens 2 Knoten), der keinen Schnittpunkt enthält (B kann einen Schnittpunkt von G enthalten). Erinnerung: Ein *induzierter* Teilgraph eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph mit der Knotenmenge $X \subseteq V$ und Kanten, die alle Kanten zwischen den Knoten von G enthalten, die in X liegen.

1. Zeigen Sie, dass ein Block entweder 2-zusammenhängend ist oder eine Kante ist.
2. Seien B_1, \dots, B_m die Blöcke von G mit E_1, \dots, E_m ihre Kanten. Zeigen Sie, dass $E = E_1 \cup \dots \cup E_m$. Erinnerung: $A \cup B$ ist die disjunkte Vereinigung, das heißt $A \cup B$ mit $A \cap B = \emptyset$.
3. Wenn G zusammenhängend ist, zeigen Sie, dass v ein Schnittpunkt von G ist, genau dann, wenn v zu (mindestens) zwei Blöcken von G gehört.
4. Für einen Graphen G mit Schnittpunkten c_1, \dots, c_r und Blöcken B_1, \dots, B_m ist der *Block-Schnittpunkt-Graph* von G der Graph $BC(G)$ mit der Knotenmenge $\{c_1, \dots, c_r\} \cup \{B_1, \dots, B_m\}$ und Kanten $c_i B_j$ genau dann, wenn $c_i \in B_j$. Zeigen Sie, dass $BC(G)$ ein Baum ist, wenn G zusammenhängend ist.

Aufgabe 5

[Bonus – Menger-Theorem auf einem unendlichen Graphen]

Während eines regnerischen Nachmittags, auf der Suche nach einer überraschenden Übung zum Menger-Theorem, öffnen Sie ein Mathematik-Lehrbuch und sehen Figure 13.

In $\Gamma_\infty = (V, E)$ zeigen Sie, dass für alle **endlichen** $X \subsetneq V$ ein Pfad von $a \in A$ nach $b \in B$ existiert, der keinen Knoten in X enthält. Zeigen Sie, dass es unmöglich ist, unendlich viele **disjunkte** Pfade zu finden, die in A beginnen und in B enden. Kommentieren Sie diese Tatsache in Bezug auf das Menger-Theorem.

Abgabe: 28.05.2025 vor 23:59

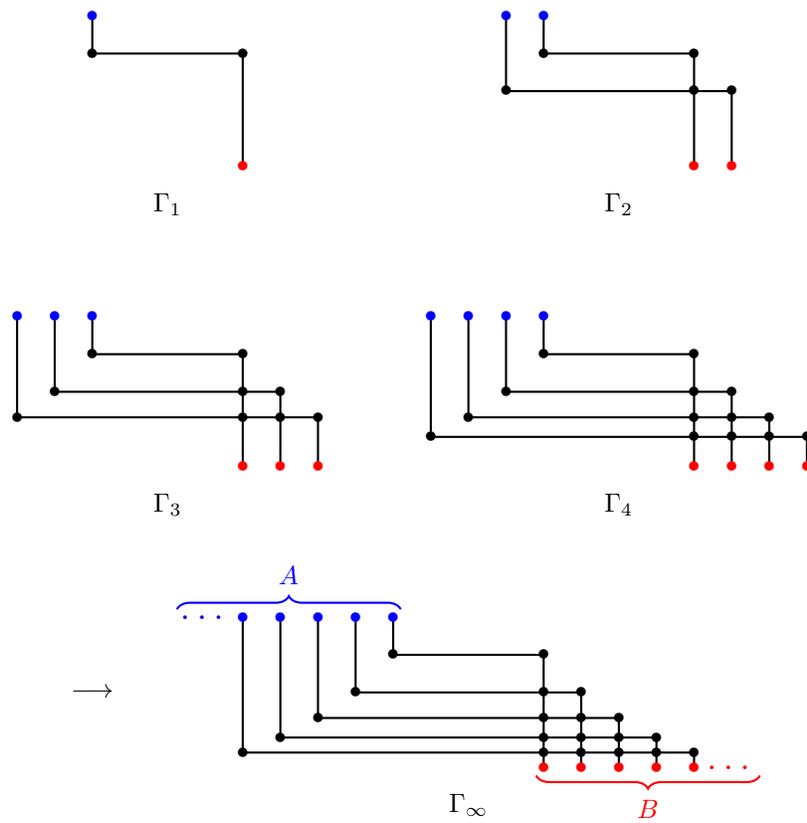


Abbildung 13: Eine überraschende Figur aus einem imaginären Mathematik-Lehrbuch.

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):

“ Sei $G_{n,n}$ der $n \times n$ Gittergraph. Dieser besitzt n^2 Knoten und ist für alle $n \geq 3$ 2-zusammenhängend. Wir interessieren uns für die Anzahl ungeordneter Knotenpaare $\{u, v\}$, deren Entfernung den Graphen unzusammenhängend macht.

Wichtige Beobachtungen:

- Da $G_{n,n}$ 2-zusammenhängend ist, führt das Entfernen eines einzelnen Knotens nie zur Trennung des Graphen.
- Bestimmte *Knotenpaare* hingegen trennen den Graphen. Solche Paare nennt man *2-Knotentrenner*.
- Die Gesamtanzahl ungeordneter Knotenpaare beträgt $\binom{n^2}{2}$, aber nur ein kleiner Bruchteil davon sind 2-Knotentrenner.

Fazit: Es ist keine einfache Formel für die Anzahl der 2-Knotentrenner in $G_{n,n}$ bekannt. Für $n \geq 3$ existieren solche Paare jedoch stets, und ihre Anzahl wächst mit n , vermutlich in der Größenordnung von $\Theta(n^2)$. Dies bleibt ein schwieriges Zählproblem in der Graphentheorie und kann für kleine n explizit durch vollständige Suche bestimmt werden. ”

Das ist falsch, erklären Sie mir, warum.

Aufgabe 7

[Knoten- und Kantenzusammenhang]

Bestimmen Sie den Knotenzusammenhang und den Kantenzusammenhang von:

1. dem Pfad P_n
2. dem Zyklus C_n
3. dem vollständigen bipartiten Graphen $K_{n,m}$ mit $n \leq m$
4. dem Hyperwürfel Q_n mit $n \geq 1$

Aufgabe 8

[Einige Eigenschaften, die auf Zusammenhang hindeuten]

1. Zeigen Sie, dass ein Graph mit n Knoten, der mindestens $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ Kanten hat, zusammenhängend ist.
2. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit genau zwei Knoten ungeraden Grades u und v . Zeigen Sie, dass $G' = (V, E \cup \{uv\})$ genau dann zusammenhängend ist, wenn G zusammenhängend ist.
3. Sei $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ die Gradfolge von G . Zeigen Sie, dass wenn $d_k \geq k$ und $k \leq n - d_n - 1$ für alle k gilt, dann ist G zusammenhängend.
4. Für ein festes n finden Sie das kleinste k , sodass Folgendes gilt: ”Für jeden Graphen G mit n Knoten, wenn G m -regulär ist mit $m \geq k$, dann ist G zusammenhängend.“

5. Zeigen Sie, dass das Komplement eines unzusammenhängenden Graphen zusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass das Umgekehrte falsch ist. das *Komplement* eines Graphen G ist der Graph \bar{G} auf derselben Knotenmenge, wobei uv eine Kante von \bar{G} ist, genau dann wenn uv keine Kante von G ist.

Aufgabe 9 [Aufteilung der Kantenverbindung]
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Kantenverbindung $\lambda(G) = k \geq 1$. Zeigen Sie, dass es $X, Y \subseteq V$ gibt, sodass $X \cup Y = V$ und es genau k Kanten gibt, von denen ein Endpunkt in X und der andere Endpunkt in Y liegt.

Aufgabe 10 [Zusammenhang und Zyklen]

1. Zeigen Sie, dass wenn G k -zusammenhängend mit mindestens $2k$ Knoten ist, dann enthält G einen Zyklus von mindestens der Länge $2k$.
2. Zeigen Sie, dass wenn G k -zusammenhängend ist, dann liegen alle k Knoten von G auf einem Zyklus (dieser Zyklus hat nicht unbedingt die Länge k).

Aufgabe 11 [3-Zusammenhang]
Zeigen Sie, dass jede Kante eines 3-zusammenhängenden Graphen auf einem nicht trennenden induzierten Zyklus liegt. Ein Zyklus C eines Graphen G ist *induziert*, wenn es in G keine Kante zwischen seinen Knoten gibt, außer der Kante von C . Ein Zyklus ist *nicht trennend*, wenn $G \setminus C$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 12 [Löschung und Kontraktion]
Wenn G k -zusammenhängend ist und uv eine Kante von G ist, zeigen Sie, dass G/uv genau dann k -zusammenhängend ist, wenn $G \setminus uv$ $(k-1)$ -zusammenhängend ist. Für $G = (V, E)$, erinnern Sie sich daran, dass $G \setminus uv = (V, E \setminus \{uv\})$ ist, und G/uv der Graph ist, der sich ergibt, indem die Knoten u und v von G zu einem einzigen Knoten zusammengeführt werden (der mit den Nachbarn von u und den Nachbarn von v verbunden ist).

Discrete Mathematics – Loesungblatt 5

Aufgabe 1

[2-Zusammenhang]

1. Direkte Anwendung der Definition.
2. Nach Satz 7.3 erhalten wir G aus einem Kreis durch Hinzufügen von Wegen zwischen zwei bereits existierenden Knoten. Ist G ein Kreis, so hat jeder Knoten auf diesem geraden Grad. Ansonsten betrachten wir den letzten Weg, der in der Konstruktion von G hinzugefügt wird. Besitzt dieser die Länge mindestens 2, so existiert wieder ein Knoten vom Grad 2. Falls nicht, so wurde als letztes eine Kante hinzugefügt, deren Entfernung nach Konstruktion in einem 2-zusammenhängenden Graphen resultiert. Dann kann G aber nicht minimal 2-zusammenhängend gewesen sein.
3. Sei H ein 2-zusammenhängender Teilgraph von G . Angenommen H ist nicht minimal. Dann existiert eine Kante $uv \in E(H)$, sodass $H \setminus \{uv\} = (V(H), E(H) \setminus \{uv\})$ 2-zusammenhängend ist. Nach Voraussetzung an G existiert aber auch ein Knoten w , sodass $G' = G \setminus \{uv\} \setminus \{w\}$ nicht zusammenhängend ist. Andererseits ist $H' = H \setminus \{uv\} \setminus \{w\}$ aber 2-zusammenhängend und damit muss H' in einer Zusammenhangskomponente C von G' enthalten sein. Entsprechend ist H Teilgraph von $G_{V(C) \cup \{w\}}$ und insbesondere gilt $u, v \in V(C) \cup \{w\}$. Dann folgt aber, dass $G \setminus \{w\}$ nicht zusammenhängend ist.

Aufgabe 2

[Kanten- und Knotenzusammenhang]

- Falls $\lambda(G) = 0$, dann ist G nicht zusammenhängend. Es folgt $\kappa(G) = 0$.
- Falls $\lambda(G) = 1$, dann existiert eine Kante uv sodass $G \setminus e$ nicht zusammenhängend ist. Falls $|V| = 2$, so ist $G \cong K_2$ und $\kappa(K_2) = \lambda(K_2) = 1$. Sonst ist $G \setminus u$ (und $G \setminus w$) nicht zusammenhängend, und es gilt $\kappa(G) = 1$.
- Falls $\lambda(G) = |V| - 1$ dann ist der Minimalgrad von G auch $|V| - 1$ (Beweis: Angenommen es existiert v mit $d(v) < |V| - 1$. Dann $G \setminus N$ ist nicht zusammenhängend, wobei $N = e \in E : v \in e$). Ein Graph $G = (V, E)$ mit Minimalgrad $|V| - 1$ ist isomorph zu $K_{|V|}$, und $\kappa(K_{|V|}) = |V| - 1$.
- Angenommen $1 < \lambda = \lambda(G) < |V| - 1$ und $G \setminus \{e_1 \dots e_\lambda\}$ ist nicht zusammenhängend. Sei $G_1 = G \setminus e_\lambda$. Es gilt $\lambda(G_1) = \lambda - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung $\kappa(G_1) \leq \lambda(G_1)$. Deswegen es existieren Knoten v_1, \dots, v_j mit $j \leq \lambda - 1$, sodass $G_2 = G_1 \setminus \{v_1 \dots v_j\}$ nicht zusammenhängend ist. Da $|V| > \lambda + 1 > 2$, hat G mindestens drei Knoten. Sei $e_k = uv$.
 - Falls $u, v \in V(G_2)$ und $G_2 \cup e_k$ zusammenhängend ist, dann ist $(G_2 \cup e_k) \setminus u = G \setminus \{v_1 \dots v_j, u\}$ nicht zusammenhängend. Es folgt, dass $\kappa(G) \leq j + 1 \leq \lambda$.

- Falls $u, v \in V(G_2)$ und $G_2 \cup e_k$ nicht zusammenhängend ist, dann ist $G \setminus \{v_1 \dots v_j\}$ nicht zusammenhängend. Es folgt, dass $\kappa(G) \leq j \leq \lambda - 1 < \lambda$.
- Falls $u \notin V(G_2)$ (oder $w \notin V(G_2)$), dann $G_2 = G \setminus \{v_1 \dots v_j\}$. Da G_2 nicht zusammenhängend ist, es folgt dass $\kappa(G) \leq j \leq \lambda - 1 < \lambda$.

Aufgabe 3

[Graphen-Zähigkeit]

1. Entfernt man einen Knoten, der kein Endpunkt im Pfad P_n ist, so wird der Pfad in zwei Zusammenhangskomponenten zerlegt, die selbst wieder Pfade sind (und es entstehen zwei neue Endpunkte). Um den Pfad P_n in k Zusammenhangskomponenten zu zerlegen, muss man mindestens $k - 1$ Knoten entfernen (unter der Annahme $n > 2k$). Daher kann P_n nicht in k verschiedene Zusammenhangskomponenten durch Entfernen von weniger als $k - 1$ Knoten zerlegt werden: Wenn P_n t -zäh ist, dann gilt $tk \leq k - 1$ für alle $k \geq 2$. Folglich ist $\tau(P_n) \leq \frac{k-1}{k}$ für alle $k \geq 2$, und daraus ergibt sich $\tau(P_n) \leq \frac{1}{2}$. Man sieht auch, dass P_n $\frac{1}{2}$ -zäh ist. Daher ist die Zähigkeit des Pfades $\tau(P_n) = \frac{1}{2}$.
2. Entfernt man einen beliebigen Knoten des Zyklus C_n , so bleibt genau eine Zusammenhangskomponente übrig, nämlich ein Pfad P_n . Um C_n in k Zusammenhangskomponenten zu zerlegen, muss man mindestens k Knoten entfernen. Daher ist die Zähigkeit des Zyklus $\tau(C_n) = \max\{t ; \forall k \geq 2, t \leq \frac{k}{k}\} = 1$.
3. Angenommen $uv \notin E$, dann erzeugt das Entfernen aller Nachbarn von u und v (insgesamt weniger als $2\Delta(G)$ Knoten) mindestens $\kappa \geq 2$ Zusammenhangskomponenten (die Komponente von u , die von v , und eventuell weitere). Folglich gilt: Wenn t so ist, dass G nicht durch Entfernen von weniger als $t\kappa$ Knoten in κ Zusammenhangskomponenten zerlegt werden kann, dann folgt $t\kappa \leq 2\Delta(G)$; das bedeutet $\tau(G) \leq \Delta(G)$ (mit $\kappa \geq 2$).
4. Ist H ein spannender Teilgraph von G und $X \subseteq V$, so hat $H \setminus X$ mindestens so viele Zusammenhangskomponenten wie $G \setminus X$ (weil G alle Kanten von H enthält). Wenn H zudem t -zäh ist, dann gilt für jede Menge $X \subseteq V$ mit $|X| < tk$, dass $H \setminus X$ weniger als k Zusammenhangskomponenten hat, und somit auch $G \setminus X$. Das bedeutet, dass G ebenfalls t -zäh ist. Da $\tau(G)$ das Supremum aller t ist, für die G t -zäh ist, folgt sofort $\tau(G) \geq \tau(H)$ für jeden spannenden Teilgraphen H von G . Das Maximum ergibt sich daraus. Für den vollständigen Graphen gilt $\tau(K_n) = +\infty$ (denn K_n kann für kein $t > 0$ durch Entfernen von tk Knoten in k Zusammenhangskomponenten zerlegt werden), und jeder spannende Teilgraph davon hat endliche Zähigkeit, daher gilt $\tau(G) \neq \max_{H \text{ spannend}} \tau(H)$.
5. Wenn G hamiltonsch ist, besitzt es einen Hamiltonkreis, also ist C_n ein spannender Teilgraph von G . Da C_n 1-zäh ist, ist auch G 1-zäh.

6. Wenn G t -zäh ist, dann gilt für $k = 2$, dass G nicht durch Entfernen von $2t$ Knoten in zwei Zusammenhangskomponenten (d.h. in einen nicht zusammenhängenden Graphen) zerlegt werden kann. Somit ist G $2t$ -fach knotenzusammenhängend per Definition.

Aufgabe 4

[Blöcke und Schnittpunkte]

1. Kanten und 2-zusammenhängende Graphen enthalten keinen Schnittpunkt. Umgekehrt, wenn G keinen Schnittpunkt enthält, dann seien u und v Knoten eines Blocks B von G . Wenn B keine Kante ist, dann kann es nur durch das Entfernen von ≥ 2 Knoten getrennt werden, da es keine Schnittpunkte hat: B ist 2-zusammenhängend. Für das Folgende nehmen wir die Konvention an, dass eine Kante 2-zusammenhängend ist.
2. Fixiere $uv \in E$ und betrachte die größte Menge $X \subseteq V$, sodass $u \in X$, $v \in X$ und $B := G|_X$ (der durch X induzierte Teilgraph von G) 2-zusammenhängend ist. Einerseits ist uv eine Kante von B . Andererseits enthält B keinen Schnittpunkt (weil er 2-zusammenhängend ist), und jede Y mit $X \subsetneq Y$ führt dazu, dass $G|_Y$ einen Schnittpunkt enthält (aufgrund der Maximalität von X). Daher ist B ein Block von G . Wir haben gezeigt, dass $E = E_1 \cup \dots \cup E_m$. Um zu sehen, dass $E_i \cap E_j = \emptyset$ ist, beachte man, dass wenn B_i und B_j sich in (mindestens) einer Kante uv schneiden, dann kann $B_i \cup B_j$ nicht durch Entfernen eines Knotens getrennt werden (weil es keinen Schnittpunkt in $B_i \setminus \{u, v\}$ oder in $B_j \setminus \{u, v\}$ gibt, und das Entfernen von u oder v die Konnektivität von $B_i \cup B_j$ nicht unterbricht, da der andere Knoten die Konnektivität sicherstellt). Dies impliziert, dass jede Kante in einem eindeutigen, wohldefinierten Block liegt.
3. Wenn v zu zwei Blöcken B und B' gehört, dann, wenn v kein Schnittpunkt von G ist, impliziert dies, dass $B \cup B'$ keinen Schnittpunkt enthält und daher 2-zusammenhängend ist: Dies würde der Maximalität von B und B' widersprechen. Also ist v ein Schnittpunkt. Umgekehrt, wenn v ein Schnittpunkt von G ist, nehmen wir an, dass alle seine Nachbarn im selben Block B sind. Dann ist $B \setminus v$ verbunden, daher können alle Nachbarn von v paarweise durch Pfade verbunden werden, die v vermeiden. Das Entfernen von v in G trennt den Graphen nicht. Dieser Widerspruch zeigt, dass v mindestens zu zwei Blöcken gehört.
4. Wenn G zusammenhängend ist, dann ist auch $BC(G)$ zusammenhängend, da die Konstruktion von $BC(G)$ darauf hinausläuft, jeden Block durch einen Knoten zu ersetzen, der mit allen Schnittpunkten verbunden ist, die dieser Block enthält, was die Konnektivität von G nicht beeinträchtigt. Nehmen Sie einen zusammenhängenden Teilgraphen von $BC(G)$, der die Blöcke B_1, \dots, B_r umfasst, und sei $X = \bigcup_i B_i$. Dann ist $G|_X$ zusammenhängend, da jeder $G|_{B_i}$ zusammenhängend ist, und wenn $B_i c$ und $B_k c$ Kanten von $BC(G)$ sind, dann ist $G|_{B_i \cup B_j}$ zusammenhängend (weil

sich $G|_{B_i}$ und $G|_{B_j}$ in c schneiden). Angenommen, $BC(G)$ hat einen Zyklus, und sei B die Vereinigung der Blöcke in diesem Zyklus, und sei $v \in B$. Wir zeigen, dass $B \setminus v$ verbunden ist. Wenn v kein Schnittpunkt ist, dann ist v in einem Block und trennt die Schnittpunkte dieses Blocks nicht, daher ist $B \setminus v$ verbunden. Wenn v ein Schnittpunkt ist, dann wird der Block-Schnittpunkt-Graph von $B \setminus v$ aus $BC(B)$ durch Entfernen von v erhalten, daher ist er zusammenhängend, und daher ist auch $B \setminus v$ zusammenhängend. Folglich ist $BC(G)$ ein Baum (ein zusammenhängender Graph ohne Zyklus).

Aufgabe 5 [Bonus – Menger-Theorem auf einem unendlichen Graphen]
 Der Graph Γ_∞ hat unendlich viele Knoten und unendlich viele Kanten. Beachte jedoch, dass jeder Knoten endlich viele Kanten hat. Lassen Sie uns die Knoten in A von rechts nach links als a_1, a_2, a_3, \dots und die Knoten in B von links nach rechts als b_1, b_2, b_3, \dots aufzählen. Für jedes n betrachten wir den Pfad P_n von a_n nach b_n , der durch das Folgen von 3 Linienabschnitten definiert ist: Der vertikale Abschnitt beginnt bei a_n , geht vertikal nach unten (zum einzigen Nachbarn von a_n), dann horizontal nach rechts, bis er sich auf der Höhe von b_n befindet, und dann vertikal nach unten zu b_n . Jeder Knoten von Γ_∞ gehört zu endlich vielen Pfaden P_n . Daher gibt es für jede **endliche** Teilmenge $X \subsetneq V$ einen Pfad P_n , der alle Knoten in X vermeidet: Keine endliche Teilmenge von Knoten X trennt A von B . Auf der anderen Seite betrachten wir eine Kollektion von disjunkten Pfaden $(Q_j)_j$ von A nach B . Beachten Sie, dass Q_j nicht unbedingt die oben beschriebene Form von P_n hat. Sei b der am weitesten links liegende Endpunkt eines bestimmten Q_j in B und $a \in A$ der andere Endpunkt von Q_j . Angenommen, es gibt einen Pfad Q_i , dessen Endpunkt in A links von a liegt. Durch die Konstruktion von b liegt der Endpunkt von Q_i in B rechts von b : Das bedeutet, dass Q_i sich mit Q_j schneidet, sodass sie nicht disjunkt sind. Daher ist a der am weitesten links liegende Endpunkt unter allen Q_j , was bedeutet, dass es endlich viele verschiedene Q_j gibt (höchstens k , sodass $a = a_k$). Mengers Satz garantiert, dass in einem endlichen Graphen G die Anzahl der disjunkten Pfade zwischen zwei Knoten u und v gleich der Anzahl der Knoten ist, die man entfernen muss, um u von v zu trennen. Dies funktioniert auch, wenn man Teilmengen der Knoten betrachtet: Für $A, B \subseteq V$ ist die Anzahl der disjunkten Pfade mit einem Endpunkt in A und einem in B gleich der Anzahl der Punkte, die entfernt werden müssen, um A von B zu trennen. Wir haben gerade gesehen, dass diese Eigenschaft in unendlichen Graphen nicht gilt, da Γ_∞ ein Gegenbeispiel ist.

Aufgabe 6 [Mit ChatGPT]
 Aufgrund der Eigenschaften des Gittergraphen besteht die einzige Möglichkeit, $G_{n,n}$ durch Entfernen genau zweier Knoten zu trennen, darin, eine Ecke v von $G_{n,n}$ auszuwählen (d. h. einen Knoten mit genau 2 Nachbarn) und seine 2 Nachbarn zu entfernen. Da $G_{n,n}$ 4 Ecken hat, gibt es genau 4 Möglichkeiten, $G_{n,n}$ durch Entfernen zweier Eckpunkte zu trennen. ChatGPT hat gesagt, es gebe $\Theta(n)$: Das ist völliger Schwachsinn.

Diskrete Mathematik – Sommersemester 2025

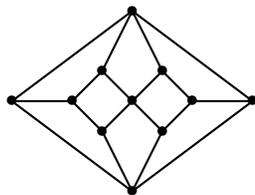
Übungsblatt 6

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden. Die Bonusübung kann bis zu +5 Bonuspunkte geben (daher sollte man sie nicht zu seiner Priorität machen).

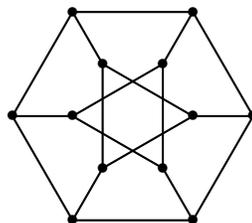
Aufgabe 1

[Satz von Kuratowski]

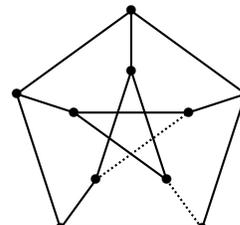
1. Welche der Herschel-, Dürer- und Petersen-Graphen sind planar, und warum? (Hinweis: Betrachten Sie das Entfernen der gestrichelten Kanten im Petersen-Graphen.)
2. Entscheiden Sie für welche $m, n > 0$ die folgenden Graphen planar sind:
 - (a) vollständiger Graph K_n
 - (b) vollständiger bipartiter Graph $K_{m,n}$
 - (c) Hyperwürfelgraph Q_n
3. Sei $G = (V, E)$ ein minimal nicht-planarer Graph. Existiert eine Kante $e \in E$, sodass $G \setminus e$ maximal planar ist? *Minimal nicht-planar*: für alle $e \in E$ ist $G \setminus e$ planar. *Maximal planar*: Für alle $e \notin E$ führt das Hinzufügen von e zu G dazu, dass es nicht planar ist.



Herschel graph



Dürer graph



Petersen graph

Aufgabe 2

[Eulersche Formel]

Sei G ein planarer (zusammenhängend) Graph mit Minimalgrad mindestens 3. Seien v_i die Anzahl der Knoten von G mit Grad i . Zeigen Sie, dass wenn G eine Triangulierung ist, d.h., in einer planaren Zeichnung, jede Fläche von 3 Kanten begrenzt ist, dann (mit δ als maximaler Grad):

$$3v_3 + 2v_4 + v_5 = v_7 + 2v_8 + 3v_9 + \dots + (\delta - 6)v_\delta + 12$$

Aufgabe 3

[Triangulierungen]

Erinnern Sie sich daran, dass eine *Triangulierung* ein planarer (zusammenhängend) Graph ist, so dass alle Regionen von 3 Kanten begrenzt sind.

1. Zeigen Sie, dass $|V|$ gerade ist, genau dann wenn $|E|$ gerade ist, für eine Triangulierung $T = (V, E)$.
2. Wie viele Knoten hat eine Triangulierung mit 42 Kanten (begründen Sie Ihre Antwort)?

Aufgabe 4

[Planare Zeichnungen]

Sei G ein planarer (zusammenhängend) Graph mit n Knoten, dessen Regionen höchstens von 4 Kanten begrenzt sind. Darüber hinaus gibt es keinen Knoten vom Grad 1. Zeigen Sie:

1. Jede planare Zeichnung von G hat mindestens $n - 2$ und höchstens $2n - 4$ Regionen.
2. Wann hat jede planare Zeichnung von G genau $n - 2$ Regionen, und wann genau $2n - 4$?

Aufgabe 5

[Bonus – Eine Pizza teilen]

Du lädst ein paar Freunde zu dir nach Hause ein, und es ist jetzt Zeit, die Pizza zu teilen. Deine Freunde sind sehr versöhnlich, also wären sie mit jedem Teil der Pizza zufrieden (unabhängig von der Größe, Form oder ob es Kruste enthält). Mit deinem Messer besteht die einzige Möglichkeit darin, die Pizza zu schneiden, indem du eine gerade Linie von einem Punkt des Randes zu einem anderen Punkt des Randes ziehst.

Wie viele Schnitte brauchen Sie, um Sie und Ihre Freunde, d.h. 220 Leute, zufrieden zu stellen?

Abgabe: 04.06.2025 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):

“ Maximale Anzahl von Kanten in einem planaren bipartiten Graphen

Sei G ein bipartiter planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Dann gilt:

$$|E(G)| \leq 2n - 4$$

Begründung: Da G bipartit ist, besitzen alle Flächen in einer planaren Einbettung eine Länge von mindestens 4 (es gibt keine ungeraden Zyklen). Mit der Euler-Formel $n - m + f = 2$ und der Ungleichung $4f \leq 2m$ ergibt sich:

$$n - m + \frac{m}{2} \geq 2 \quad \Rightarrow \quad m \leq 2n - 4$$

Beispiel: Der planare Gittergraph $P_k \times P_\ell$ hat $n = k\ell$ Knoten und $2n - 2k - 2\ell + 2$ Kanten. Für große k, ℓ nähert sich diese Zahl der Schranke $2n - 4$.

Das ist falsch, erklären Sie mir, warum (das ist unauffällig).

Aufgabe 7

[Beschränkung des Grades von planaren Graphen]

1. Beweisen Sie, dass es keinen planaren Graphen mit 6 Knoten gibt, von denen mindestens 3 Knoten Grad 5 haben.
2. Finden Sie die maximale Anzahl a von Kanten, die ein planarer Graph mit 6 Knoten haben kann, und zeichnen Sie einen planaren Graphen mit 6 Knoten und a Kanten.

Aufgabe 8

[(Fußball-)Ball]

Ein Ball (für ein Fußballspiel) ist ein Polyeder, das aus Sechsecken und Fünfecken besteht. Wir nehmen an, dass der Graph eines 3-dimensionalen Polyeders immer planar ist (der Graph G eines Polyeders ist der Graph, dessen Knoten die Ecken des Polyeders sind und dessen Kanten die Kanten des Polyeders sind). Finden Sie die Anzahl der Knoten, Kanten, Fünfecke und Sechsecke, die ein Ball haben kann.

Aufgabe 9

[Platonische Körper]

Ein *Platonischer Körper* ist ein 3-dimensionales (konvexes) Polyeder, dessen Flächen alle reguläre Polygone mit derselben Anzahl von Seiten sind und dessen Ecken alle dieselbe Anzahl von benachbarten Kanten haben. Wir nehmen an, dass der Graph eines Polyeders ein planarer Graph ist (der Graph G eines Polyeders ist der Graph, dessen Knoten die Ecken des Polyeders sind und dessen Kanten die Kanten des Polyeders sind). Zeigen Sie, dass es nur 5 Platonische Körper gibt. Wer sind sie?

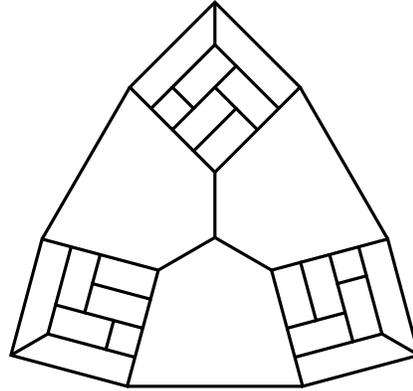


Abbildung 14: Tutte Graph

Aufgabe 10

[Tutte Graph]

1884 vermutete Peter Tait (dessen Wikipedia-Foto beeindruckend ist): “Jeder 3-fach zusammenhängende planare kubische Graph hat einen Hamiltonkreis (entlang der Kanten) durch alle seine Knoten.” Zur Erinnerung: *kubisch* bedeutet, dass jeder Knoten den Grad 3 hat. Sehen Sie sich den Graphen an, den William Tutte 1946 in Figure 14 erstellt hat. Was meinen Sie dazu?

Discrete Mathematics – Loesungblatt 6

Aufgabe 1

[Satz von Kuratowski]

1. Der Herschel-Graph ist offensichtlich planar (aus seiner Zeichnung ersichtlich). Der Dürer-Graph ist planar, siehe Figure 15 (Links), nur 3 Knoten wurden verschoben. Der Petersen-Graph ist nicht planar, da er eine Unterteilung von $K_{3,3}$ enthält, siehe Figure 15 (Rechts).

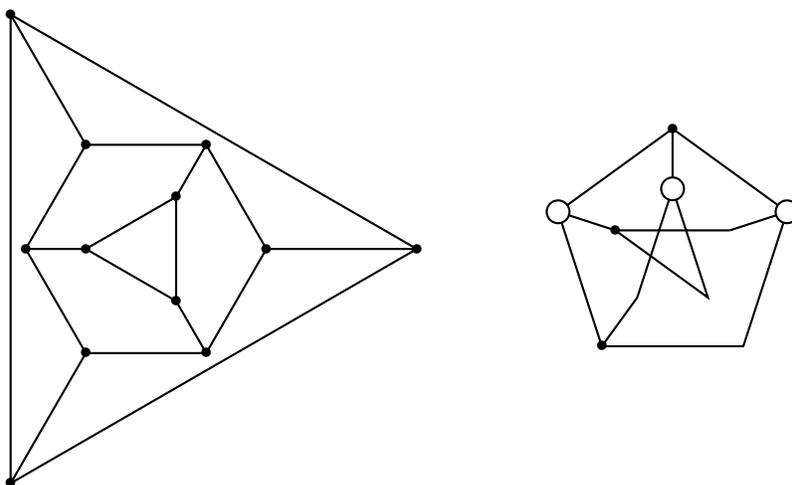


Abbildung 15: Links: Planare Zeichnung des Dürer-Graphen, nur 3 Knoten wurden verschoben. Rechts: Unterteilung von $K_{3,3}$ innerhalb des Petersen-Graphen, beachten Sie, dass 4 Knoten entfernt wurden (und zwei Kanten gelöscht).

2.
 - Für $n \leq 4$ ist K_n planar. Für $n \geq 5$ enthält K_n einen K_5 -Teilgraph und ist somit nach dem Satz von Kuratowski nicht planar.
 - Ist $n \leq 2$, so kann $K_{n,m}$ wie Figure 16 planar gezeichnet werden. Analog ist $K_{n,m}$ für $m \leq 2$ planar. Sind $m, n \geq 3$, so enthält $K_{n,m}$ einen $K_{3,3}$ -Teilgraph und ist somit nicht planar.
 - Für $n \leq 3$ ist Q_n planar. In Q_3 fehlt nur ein Pfad für eine $K_{3,3}$ -Unterteilung (siehe Figure 17a). Dieser existiert in Q_4 . Da $Q_n \subseteq Q_{n+1}$ für jedes n ist, folgt dass Q_n für $n \geq 4$ nicht planar ist.

3. Nein, denn:

Wir wissen aus der Vorlesung, dass $K_{3,3}$ minimal nicht planar ist. Entfernen wir eine Kante aus $K_{3,3}$, können wir eine andere Kante hinzufügen und erhalten einen planaren Graph (siehe Figure 17b, die geschlängelte Kante ist die neu hinzugefügte).

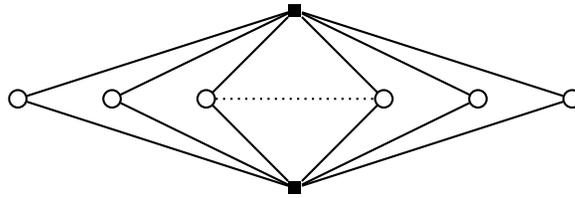


Abbildung 16

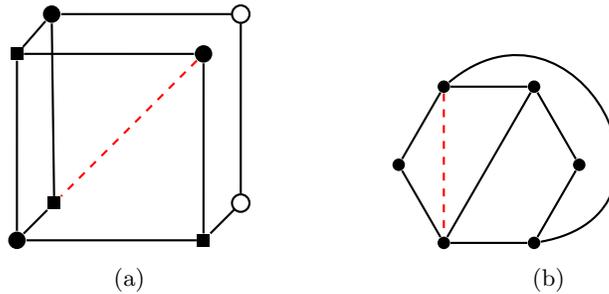


Abbildung 17

Aufgabe 2

[Eulersche Formel]

Da G eine Triangulierung ist, enthält jedes Gebiet 3 Kanten im Rand. Andererseits liegt aber auch jede Kante im Rand von genau 2 Gebieten. Doppeltes Abzählen ergibt damit

$$3g = 2|E|, \quad \text{d.h.} \quad g = \frac{2}{3} \cdot |E|.$$

Desweiteren gilt

$$n = \sum_{i=3}^{\Delta} v_i$$

per Definition von v_i . Die letzte Relation, die wir verwenden werden ist

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{i=3}^{\Delta} v_i \cdot i,$$

d.h. $|E| = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=3}^{\Delta} v_i \cdot i$. Insbesondere folgt aus (), dass

$$g = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=3}^{\Delta} v_i \cdot i.$$

Setzen wir dies alles in die Euler-Formel ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 2 &= v_3 + \dots + v_\Delta - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=3}^{\Delta} v_i \cdot i + \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=3}^{\Delta} v_i \cdot i \\ &= v_3 + \dots + v_\Delta - \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=3}^{\Delta} v_i \cdot i. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit 6 folgt

$$12 = \sum_{i=3}^{\Delta} (6 - i)v_i,$$

woraus nach einer leichten Umformung die Behauptung folgt.

Aufgabe 3

[Triangulierungen]

1. Sei F die Menge der Gebiete in einer planaren Zeichnung. Wir zählen die Elemente in $M = \{(e, f) : e \in E, f \in F, e \in f\}$. Da jedes Gebiet von drei Kanten berandet wird, gilt $|M| = 3|F|$. Da jede Kante im Rand von zwei Gebieten liegt, gilt $|M| = 2|E|$. Daraus folgt $2|E| = 3|F|$ und $|F|$ ist gerade. Mittels der Euler-Formel folgt, dass $|V| - |E| = 2 - |F|$ gerade ist. Damit ist $|V|$ genau dann gerade (ungerade) wenn $|E|$ gerade (ungerade) ist.
2. Wir müssen das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\begin{cases} |V| - |E| + |F| = 2 \\ 2|E| = 3|F|. \end{cases}$$

Deswegen hat jede Triangulation mit 42 Kanten genau $|V| = 2 + |E|/3 = 2 + 14 = 16$ Knoten.

Aufgabe 4

[Planare Zeichnung]

1. Da es keine Knoten vom Grad 1 gibt, muss jede Kante in zwei Gebieten liegen und jedes Gebiet hat mindestens 3 Kanten. Mittels doppeltem Abzählen erhalten wir

$$\begin{aligned} 2 \cdot |E| &= \sum_{e \in E} |\{X \text{ Gebiet} : e \text{ liegt im Rand von } X\}| \\ &= \sum_{X \text{ Gebiet}} |\{e \in E : e \text{ liegt im Rand von } X\}| \\ &\begin{cases} \leq 4g \text{ (da jedes Gebiet maximal 4 Kanten besitzt)} \\ \geq 3g \text{ (da jedes Gebiet mindestens 3 Kanten besitzt)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Somit gilt $3g \leq 2|E| \leq 4g$. Aus der Euler-Formel folgt $|E| = n + g - 2$. Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$3g \leq 2n + 2g - 4 \leq 4g,$$

woraus $n - 2 \leq g \leq 2n - 4$ folgt.

2. Gleichheit gilt genau dann wenn es sich bei den obigen Abschätzungen um Gleichungen handelt, d.h. es muss $2|E| = 4g$ bzw. $2|E| = 3g$ gelten, was wiederum bedeutet, dass jedes Gebiet von 4 bzw. 3 Kanten berandet wird.

Aufgabe 5

[Bonus – Eine Pizza teilen]

Sei S die Anzahl der Stücke. Wir betrachten den Graphen G (Figure 18), dessen Knoten durch die Kreuzungspunkte von je 2 Schnitten und die Kreuzungspunkte der Schnitte mit dem Rand gegeben sind. Die Kanten von G seien die dadurch gegebene Unterteilung der Schnitte und des Rands.

Um die Anzahl der Stücke zu maximieren, machen wir die Schnitte so, dass sich jeder Schnitt mit jedem anderen schneidet, und dass sich keine drei Schnitte am selben Punkt schneiden.

Da G ein planar Graph ist, gilt $S = |F(G)| - 1 = |E(G)| - |V(G)| + 1$.

- Jeder Schnitt kreuzt den Rand zweimal, und je zwei Schnitte kreuzen sich. Deswegen gilt $|V(G)| = 2n + \binom{n}{2}$.
- Der Rand ist in $2n$ Kanten unterteilt. Außerdem ist jeder Schnitt in n Kanten unterteilt, weil auf jedem Schnitt genau $n + 1$ Knoten liegen. Deswegen gilt $|E(G)| = 2n + n \cdot n$.

Nun folgt

$$\begin{aligned} S &= |F(G)| - 1 = |E(G)| - |V(G)| + 1 \\ &= 2n + n \cdot n - 2n - \binom{n}{2} + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2}. \end{aligned}$$

Jetzt, wenn ich 219 Freunde habe (also 220 Personen zu ernähren, einschließlich mir selbst), möchte ich das kleinste n finden, sodass $\frac{n^2+n+2}{2} \geq 220$, was $n = 21$ ist. Das ergibt 232 Stücke.

Viel Glück beim Schneiden der Pizza (du wirst eine große Pizza brauchen, um nicht zu dünn geschnittene Stücke zu haben)!

Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

Die Argumentation ist korrekt, aber das letzte Beispiel ist falsch. ChatGPT kennt die Anzahl der Kanten eines Gittergraphen nicht (die übrigens mit $P_k \square P_\ell$ bezeichnet werden sollte): Die korrekte Kantenzahl ist $k\ell - k - \ell$ oder $n - k - \ell$.

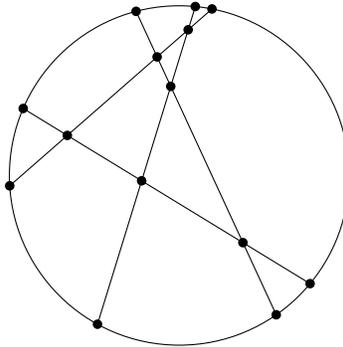


Abbildung 18: A pizza.

Universität Osnabrück
Institut für Mathematik

Martina Junhke
Germain Poullot
Tarek Emmerich

Diskrete Mathematik – Sommersemester 2025

Übungsblatt 7

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden. Die Bonusübung kann bis zu +5 Bonuspunkte geben (daher sollte man sie nicht zu seiner Priorität machen).

Aufgabe 1

[Färbungen von Graphen]

1. Bestimmen Sie $\chi(G)$ für:
 - (a) Pfadgraph $G = P_n$
 - (b) Zyklus $G = C_n$.
 - (c) Vollständiger Graph $G = K_n$
 - (d) Vollständig bipartiter Graph $G = K_{n,m}$
2. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Weiter sei $f : V \rightarrow [k]$ eine Färbung von G . Zeigen Sie: Für alle $\{i, j\} \in \binom{[k]}{2}$ existiert eine Kante $uv \in E$ mit $f(u) = i$ und $f(v) = j$.
3. Folgern Sie:

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}}$$

Aufgabe 2

[Chromatische Polynome]

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $e = uv \in E$. Wir definieren den Graph G/e wie folgt: $V(G/e) := (V \setminus \{u, v\}) \cup \{\bar{u}\}$ und $E(G/e) := \{e \in E : u, v \notin e\} \cup \{\bar{u} : \bar{u} = uv\}$.

$w \neq u, w \neq v, uw \in E$ or $vw \in E$ }. (Der Graph G/e entsteht aus G durch *kontrahieren* der Kante e).

Sei $P_G(k)$ die Anzahl der Färbungen von G mit k Farben.

1. Zeigen Sie, dass $P_G(k) = P_{G \setminus e}(k) - P_{G/e}(k)$ für jedes $k \geq 0$ gilt.
2. Bestimmen Sie $P_{K_n}(k)$ in Abhängigkeit von k und n .
(Hinweis: Benutzen Sie (i) und eine Induktion über n .)
3. Zeigen Sie, dass die Funktion $P_G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, k \mapsto P_G(k)$ eine Polynomfunktion in k vom Grad $|V|$ ist.

Aufgabe 3 [Außerplanare Graphen]

Ein planarer Graph $G = (V, E)$ heißt *außerplanar*, falls er eine planare Zeichnung besitzt, bei der alle Knoten im Rand des unbeschränkten Gebietes liegen.

Zeigen Sie:

1. Wenn G ein äußerer planarer Graph mit einem maximalen Grad von 2 ist, dann ist G 3-färbbar.
2. Wenn G ein äußerer planarer Graph mit einem Knoten u von mindestens Grad 3 ist, dann kann G in zwei kleinere äußere planare Graphen H_1 und H_2 aufgeteilt werden, so dass $G = H_1 \cup H_2$ und $H_1 \cap H_2$ eine Kante ist.
3. Jeder äußere planare Graph ist 3-färbbar.

Aufgabe 4 [Kanten-Färbungen]

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie:

1. Ist $c : E \rightarrow [k]$ eine Kanten-Färbung von G , so ist jede Menge $E_i = \{e \in E : c(e) = i\}$ ein Matching von G . Eine *Kanteneinfärbung* ist eine Einfärbung der Kanten von G , sodass benachbarte Kanten unterschiedliche Farben erhalten.
2. Ist G r -regulär und $\chi'(G) = \Delta(G)$, so besitzt G ein Matching, das V überdeckt. Beachten Sie, dass $\chi'(G)$ die minimale Anzahl von Farben ist, die benötigt wird, damit eine Kanteneinfärbung existiert.
3. Ist G r -regulär und $|V|$ ungerade, so ist $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Aufgabe 5 [Bonus – Ramseytheorie]

Du zeichnest einen vollständigen Graphen der Größe n auf dein Papier, als ein Freund vorbeikommt. Er schlägt das folgende Spiel vor: Du färbst einige Kanten rot, dann färbt er einige Kanten blau, dann färbst du wieder einige Kanten rot, und so weiter. Der Verlierer ist die erste Person, die ein einfarbiges Dreieck erstellt (d.h. drei paarweise benachbarte Kanten in derselben Farbe färbt). Zeige, dass es möglich ist, dass niemand verliert, wenn $n = 5$, aber es wird immer einen Verlierer geben, wenn $n \geq 6$.

Am nächsten Tag triffst du deine kleine Schwester, und du schlägst dasselbe Spiel vor. Sie ist schlau und verlangt, dass du verlierst, wenn du ein rotes Dreieck erstellst, aber sie verliert nur, wenn sie ein blaues K_4 erstellt. Welchen minimalen Wert von n musst du wählen, damit das Spiel einen Verlierer hat? Hinweis: Du kannst beweisen (oder direkt verwenden), dass $R(r, s) < R(r - 1, s) + R(r, s - 1)$ wenn $R(r - 1, s)$ und $R(r, s - 1)$ gerade sind, wobei $R(r, s)$ das kleinste n ist, sodass entweder ein rotes K_r oder ein blaues K_s entsteht, wenn man die Kanten von K_n in Rot und Blau färbt.

Abgabe: 11.06.2025 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 6 [Mit ChatGPT]
ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):

“ **Anzahl der 3-färbbaren einfachen Graphen mit 5 Knoten**

Es gibt $\binom{5}{2} = 10$ mögliche Kanten in einem einfachen Graphen mit 5 Knoten. Daher ergibt sich die Gesamtanzahl der einfachen Graphen zu:

$$2^{10} = 1024.$$

Um die Anzahl der 3-färbbaren Graphen zu bestimmen, subtrahieren wir diejenigen mit chromatischer Zahl mindestens 4.

Für Graphen mit 5 Knoten gilt:

- Es gibt genau einen Graphen mit chromatischer Zahl 5, nämlich den vollständigen Graphen K_5 .
- Es gibt 5 weitere Graphen (neben K_5) mit chromatischer Zahl 4.

Somit gibt es insgesamt 6 Graphen mit chromatischer Zahl ≥ 4 .

Daher ergibt sich die Anzahl der 3-färbbaren Graphen zu: $1024 - 6 = \boxed{1018}$.

”

Das ist falsch, erklären Sie mir, warum.

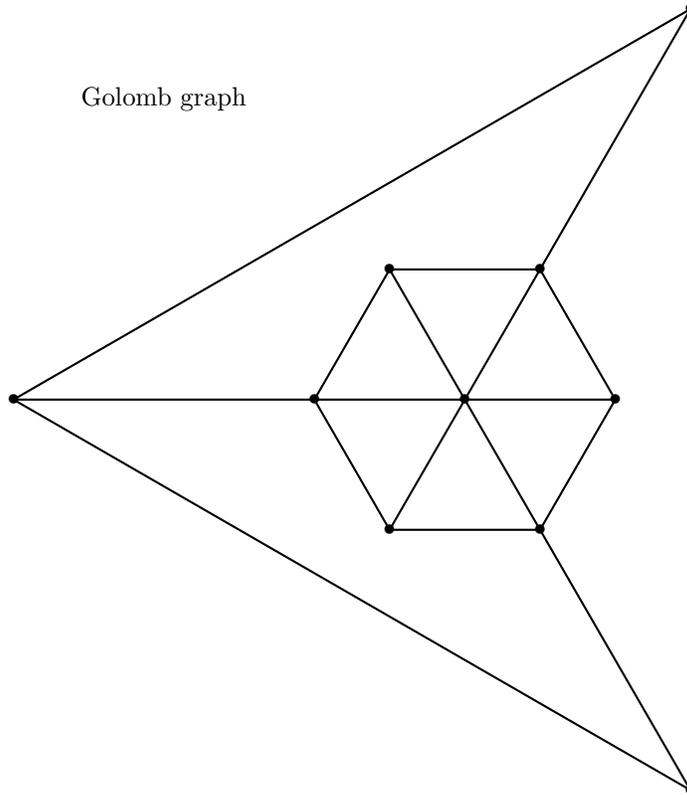
Aufgabe 7 [Hypercube Graph]
Beweisen Sie, dass für $n \geq 1$ der Hyperwürfelgraph Q_n 2-färbbar ist.

Aufgabe 8 [Petersen-Graph]
Für G , den Petersen-Graphen, berechnen Sie $\chi(G)$.

Aufgabe 9 [Hadwiger–Nelson-Problem]
Wir betrachten den folgenden unendlichen Graphen Γ : die Menge der Knoten von Γ sind alle Punkte der Ebene \mathbb{R}^2 ; es gibt eine Kante pq , wenn die Punkte p und q genau 1 Einheit voneinander entfernt sind (euklidische Distanz). Das *Hadwiger–Nelson-Problem* fragt nach der Berechnung von $\chi(\Gamma)$.

1. Kacheln Sie die Ebene mit regelmäßigen Sechsecken von Durchmesser $1 - \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ sehr klein. Zeigen Sie, dass man diese Sechsecke mit 7 Farben färben kann, sodass $\chi(\Gamma) \leq 7$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass der Golomb-Graph G (siehe unten) in der Ebene so gezeichnet werden kann, dass benachbarte Knoten genau 1 Einheit voneinander entfernt sind.
3. Zeigen Sie, dass $\chi(G) = 4$ und folgern Sie, dass $\chi(\Gamma) \geq 4$ ist.
4. **N.B.** Die aktuelle Forschung [Mai 2024] besagt, dass $\chi(\Gamma) \in \{5, 6, 7\}$, aber der tatsächliche Wert ist unbekannt. Wenn Sie viel Zeit haben, lösen Sie dieses Problem!

Golomb graph



Aufgabe 10

[Gierige Färbung und Intervallgraphen]

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{1, \dots, n\}$. Die *gierige Färbung* von G ist die Färbung $c : V \mapsto \mathbb{N}$ mit

$$c(j) = \min(\mathbb{N} \setminus \{c(i) \mid 1 \leq i < j \text{ und } ij \in E\}).$$

Die *gierige chromatische Zahl* $\chi_g(G)$ ist die Anzahl der Farben, die bei der gierigen Färbung verwendet werden.

1. Zeigen Sie, dass die gierige Färbung eine (Knoten-)Färbung ist.
2. Zeigen Sie, dass zwei isomorphe Graphen nicht notwendigerweise die gleiche gierige chromatische Zahl haben.
3. Zeigen Sie, dass für jeden Graphen G , der isomorph zum vollständigen bipartiten Graphen $K_{n,m}$ ist, gilt: $\chi_g(G) = 2$.
4. Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \dots, 2n\}$ und

$$E = \{\{i, j\} \mid 1 \leq i \leq n \text{ und } n + 1 \leq j \leq 2n, j \neq i + n\};$$

und sei $G' = (V, E')$ mit

$$E' = \{\{i, j\} \mid i \text{ ungerade, } j \text{ gerade, } j \neq i + 1\}.$$

Zeigen Sie, dass G und G' isomorph sind, aber $\chi_g(G) = 2$ während $\chi_g(G') = n$.

5. Für $X \subseteq \mathbb{R}$ sei $\text{range}(X) = \max(X) - \min(X)$. Folgern Sie, dass es eine Folge von Graphen G_n gibt, so dass

$$\text{range}(\chi_g(H) ; H \text{ isomorph zu } G_n) \rightarrow +\infty \quad \text{für } n \rightarrow +\infty.$$

6. Zeigen Sie, dass es für jeden Graphen G einen isomorphen Graphen H gibt, so dass $\chi_g(H) = \chi(G)$.

Sei $\mathcal{I} = (I_1, \dots, I_r)$ eine Menge von Intervallen in \mathbb{R} . Der zugehörige *Intervallgraph* $G_{\mathcal{I}}$ ist der Graph mit Knotenmenge \mathcal{I} und Kanten zwischen I_j und I_k genau dann, wenn $I_j \cap I_k \neq \emptyset$.

1. Für jedes $I_k \in \mathcal{I}$ sei $x_k = \min I_k$. Berechnen Sie $\chi_g(H)$ für den Graphen H , der durch die Sortierung der Intervalle nach x_k entsteht (isomorph zu $G_{\mathcal{I}}$).
2. Zeigen Sie, dass für diesen H gilt: $\chi_g(H) = \chi(G_{\mathcal{I}})$.

Aufgabe 11

[Grundy-Zahl]

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{1, \dots, n\}$. Die *gierige Färbung* von G ist definiert durch

$$c(j) = \min(\mathbb{N} \setminus \{c(i) ; 1 \leq i < j \text{ und } ij \in E\}).$$

Die *gierige chromatische Zahl* $\chi_g(G)$ ist die Anzahl der verwendeten Farben. Die *Grundy-Zahl* ist definiert als

$$\Psi(G) = \max(\chi_g(H) ; H \text{ isomorph zu } G).$$

1. Berechnen Sie $\Psi(G)$ für den Pfad P_n .
2. Berechnen Sie $\Psi(G)$ für den Kreis C_n .
3. Zeigen Sie, dass wenn G ein Dreieck enthält (d.h. drei paarweise verbundene Knoten) oder vier Knoten, deren Kanten einen Pfad bilden, dann gilt: $\Psi(G) \neq \chi(G)$.
4. Folgern Sie, dass die vollständigen bipartiten Graphen $K_{n,m}$ die einzigen zusammenhängenden Graphen sind, für die $\Psi(G) = 2$ gilt.
5. Ein Graph heißt *wohlgefärbt*, wenn $\Psi(G) = \chi(G)$. Zeigen Sie, dass $K_{2,2,2}$ (der Graph, der aus K_6 durch Entfernen der Kanten 14, 25 und 36 entsteht) wohlgefärbt ist.
6. Zeigen Sie, dass jeder vollständig multipartite Graph wohlgefärbt ist.
7. Zeigen Sie, dass $\Psi(G) \geq k$ genau dann, wenn der Graph, der durch Hinzufügen einer $(k-1)$ -Knoten-Klique zu G entsteht, wohlgefärbt ist.

Discrete Mathematics – Loesungblatt 7

Aufgabe 1

[Färbungen von Graphen]

- $\chi(P_n) = 2$ für $n \geq 2$, weil P_n bipartit ist.
 - $\chi(C_n) = 2$ wenn n gerade ist (weil dann C_n bipartit ist), und $\chi(C_n) = 3$ wenn n ungerade ist (weil das Entfernen eines Knotens zu einem Pfad führt, der 2-färbbar ist, und dann können wir den letzten Knoten mit einer dritten Farbe färben).
 - In K_n sind alle Knoten miteinander verbunden. Daher ist $\chi(K_n) = n$.
 - Die Knotenmenge von $K_{m,n}$ ist die disjunkte Vereinigung von zwei Mengen A und B , in denen keine Knoten miteinander verbunden sind. Wir können die Knoten in A mit a und die Knoten in B mit b färben. Daher ist $\chi(K_{m,n}) = 2$.
- Sei $f : V \rightarrow C$ eine Färbung mit $|C| = k$ und sei $V_i = \{v \in V : f(v) = i\}$. Angenommen $E \cap (V_i \times V_j) = \emptyset$ (es gibt keine Kante uv mit $f(u) = i$ und $f(v) = j$), mit $i \neq j \in C$. Wir definieren $f' : V \rightarrow C \setminus \{j\}$ als

$$f'(v) = \begin{cases} i & \text{falls } v \in V_j \\ k & \text{falls } v \in V_k, k \neq j \end{cases}.$$

Da $E \cap (V_i \times V_j) = \emptyset$, ist f' eine Färbung von G mit $|C \setminus \{j\}| = k - 1$. Das ist ein Widerspruch zu $\chi(G) = k$.

- Gemäß Aufgabenteil (i) gibt es mindestens eine Kante für alle $\{i, j\} \in \binom{C}{2}$. Es folgt $|E| \geq \binom{k}{2}$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \binom{k}{2} &\leq |E| \Leftrightarrow \\ \frac{k(k-1)}{2} &\leq |E| \Leftrightarrow \\ k^2 - k - 2|E| &\leq 0 \Rightarrow \\ k &\leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2|E|}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

[Chromatische Polynome]

- Wir stellen fest: jede Färbung mit k Farben von G entspricht einer Färbung mit k Farben von $G \setminus e$. Andererseits gibt jede Färbung $f : V(G \setminus e) \rightarrow [k]$ mit $f(u) \neq f(v)$ eine Färbung von G .

Des weiteren entspricht jede Färbung $f : V(G \setminus e) \rightarrow [k]$ mit $f(u) = f(v)$ genau einer Färbung von G/e . Somit existiert eine Bijektion

$$\{\text{Färbungen von } G \setminus e\} \leftrightarrow \{\text{Färbungen von } G\} \cup \{\text{Färbungen von } G/e\}$$

und es folgt die Behauptung.

2. **per Induktion:** Wir zeigen per Induktion über n , dass $P_{K_n}(k) = \prod_{i \in [n]} (k - i + 1)$ gilt.

Für $n = 1$ gilt dies offensichtlich. Sei also $n \geq 2$. Nach (i) gilt

$$P_{K_n}(k) = P_{K_n \setminus e}(k) - P_{K_n/e}(k)$$

für jede Kante $e \in E(K_n)$. Weiter ist $K_n/e = K_{n-1}$, also gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$P_{K_n/e}(k) = \prod_{i \in [n-1]} (k - i + 1).$$

$K_n \setminus e$ entsteht aus K_{n-1} durch hinzufügen eines neuen Grad $n - 2$ Knoten v . Ist eine Färbung $f : K_{n-1} \rightarrow [k]$ gewählt lässt sich diese zu einer Färbung $\tilde{f} : K_n \setminus e \rightarrow [k]$ erweitern, indem $\tilde{f}(v)$ so gewählt wird, dass $\tilde{f}(v) \neq f(w)$ für alle $w \in N(V)$ gilt. Es gibt also $k - (n - 2)$ viele Möglichkeiten f zu erweitern und es folgt

$$P_{K_n \setminus e}(k) = (k - (n - 2))P_{K_{n-1}}(k)$$

und somit

$$P_{K_n}(k) = (k - (n - 2))P_{K_{n-1}}(k) - P_{K_{n-1}}(k) = (k - (n - 1))P_{K_{n-1}}(k) = \prod_{i \in [n]} (k - i + 1)$$

ohne Induktion: Für $k < n$ ist $P_{K_n}(k) = 0$.

Ist $k > n$ wählen wir eine beliebige Reihenfolge v_1, \dots, v_n der Knoten von K_n . Es gibt k Möglichkeiten v_1 zu färben, danach bleiben $k - 1$ Möglichkeiten für v_2 , $k - i + 1$ Möglichkeiten für v_i ($i \in [n]$). Daher folgt $P_{K_n}(k) = \prod_{i \in [n]} (k - i + 1)$ (tatsächlich gilt diese Gleichheit auch für $k < n$).

3. Wir führen eine Induktion über $m = |E|$:

Ist $m = 0$, so ist $G = (V, \emptyset)$ und jeder Knoten $v \in V$ kann beliebig gefärbt werden. Es folgt also $P_G(k) = k^n$

Sei nun $m \geq 1$ und die Behauptung gelte für alle Graphen mit höchstens $m - 1$ Kanten. Sei $e \in E(G)$ dann gilt nach (i) $P_G(k) = P_{G \setminus e}(k) - P_{G/e}(k)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $P_{G \setminus e}(k)$ ein Polynom vom Grad n und $P_{G/e}(k)$ ein Polynom vom Grad $n - 1$. Insgesamt ergibt sich, dass $P_G(k)$ ein Polynom vom Grad n ist.

Aufgabe 3

[Außerplanare Graphen]

1. Da G zusammenhängend ist, gilt $d(u) \geq 1$ für alle $u \in V$. Der einzige Graph in dem alle Knoten Grad 1 haben, besteht aus einer einzigen Kante. Demnach folgt die Behauptung.
2. Sei G außerplanar. Wir zeigen die Aussage per Induktion nach $|V|$. Ist $|V| \leq 3$, so kann jeder Knoten mit einer anderen Farbe gefärbt werden und es folgt die Behauptung. Sei also $|V| \geq 4$. Besteht G aus mehreren Zusammenhangskomponenten, so können wir die Induktionsvoraussetzung auf jede Komponente anwenden. Sei also G zusammenhängend. Nach (i) existiert ein Knoten u vom Grad ≥ 2 . Gilt $d(u) = 2$, so können wir u entfernen. Der erhaltene Graph ist nach wie vor außerplanar und nach Induktionsvoraussetzung 3-färbbar. Da die Nachbarn von u nur maximal zwei Farben verwenden, können wir u mit einer der verbliebenen Farben färben. Sei also $d(u) > 3$. Dann existiert ein Nachbar v von u , sodass die Kante uv nicht im Rand der außerplanaren Zeichnung liegt. Wir können G nun in zwei außerplanare Teilgraphen aufteilen, die beide uv enthalten und weniger Knoten besitzen. Nach Induktionsvoraussetzung sind diese beiden Graphen 3-färbbar und nach etwaigem Umfärben können wir annehmen, dass u und v in beiden Graphen gleich gefärbt sind. Auf diese Weise erhalten wir eine 3-Färbung von G .

Aufgabe 4

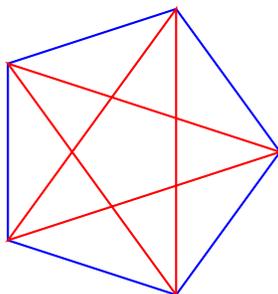
[Kantenfärbungen]

1. Nach Definition einer Kantenfärbung sind gleichgefärbte Kanten nicht inzident. Demnach bilden Kanten derselben Farbe ein Matching.
2. Ist G r -regulär, so ist $\Delta(G) = r$. Ist $\chi'(G) = \Delta(G) = r$, so existiert für jeden Knoten $u \in V(G)$ und jede Farbe $1 \leq i \leq r$ eine Kante uv mit $c(uv) = i$. Dabei ist c eine minimale Kantenfärbung. Nach (i) bildet die Kantenmenge E_1 ein Matching von G . Nach dem vorigen Argument, wird jeder Knoten von V überdeckt.
3. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G) + 1\}$ gilt. Wäre $\chi'(G) \neq \Delta(G) + 1$, so müsste also $\chi'(G) = \Delta(G)$ gelten und nach (ii) besitzt G ein Matching, dass V überdeckt. Dann muss aber $|V|$ gerade sein.

Aufgabe 5

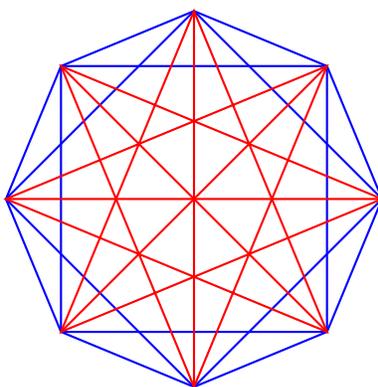
[Bonus – Ramseytheorie]

Wenn $n = 5$ ist, führt die folgende Färbung der Kanten von K_5 zu einem Unentschieden.



Nun fixiere eine Rot-Blau-Färbung der Kanten von K_n für $n \geq 6$. Wenn $n = 6$ ist, fixiere einen Knoten v : Er hat den Grad $6 - 1 = 5$ in K_6 . Unter diesen 5 Nachbarn sind entweder mindestens 3 durch eine blaue Kante verbunden oder mindestens 3 sind durch eine rote Kante verbunden. Angenommen, v hat 3 durch blaue Kanten verbundene Nachbarn (der rote Fall ist symmetrisch), wenn sie paarweise durch rote Kanten verbunden sind, dann gibt es ein rotes Dreieck; andernfalls gibt es zwei durch blaue Kanten verbundene Nachbarn von v , die durch eine blaue Kante verbunden sind, und somit haben wir ein blaues Dreieck. Wenn $n \geq 6$ ist, dann enthält K_n ein K_6 , für das jede Färbung ein einfarbiges Dreieck erzeugt.

Mit $R(r, s) < R(r - 1, s) + R(r, s - 1)$ (siehe Beweis unten), erhalten wir $R(3, 4) < R(2, 4) + R(3, 3)$. Einerseits haben wir $R(3, 3) = 6$ nach obiger Argumentation, andererseits haben wir $R(2, n) = n$, weil es möglich ist, die Kanten von K_{n-1} zu färben, ohne ein rotes K_n oder ein blaues K_2 zu erzeugen (indem man alle Kanten von K_{n-1} rot färbt), aber unmöglich ist, die Kanten von K_n zu färben, ohne eine blaue Kante K_2 oder ein rotes K_n zu erzeugen. Daher, $R(3, 4) < 4 + 6 = 10$, d.h. $R(3, 4) \leq 9$. Es bleibt zu zeigen, dass es eine Kantenfärbung von K_8 gibt, bei der es weder ein rotes K_3 noch ein blaues K_4 gibt. Hier ist sie:



N.B. [Angepasst von Wikipedia] Wir beweisen, dass $R(r, s) \leq R(r - 1, s) + R(r, s - 1)$ durch Induktion über $r + s$.

Betrachte einen vollständigen Graphen auf $n = R(r - 1, s) + R(r, s - 1)$ Knoten, dessen Kanten rot und blau gefärbt sind. Wähle einen Knoten v aus dem Graphen und teile die verbleibenden Knoten in zwei Mengen M und N auf, so dass für jeden Knoten w , w in M ist, wenn die Kante vw blau ist, und w in N ist, wenn vw rot ist. Da der Graph $R(r - 1, s) + R(r, s - 1) = |M| + |N| + 1$ Knoten hat, folgt, dass entweder $|M| \geq R(r - 1, s)$ oder $|N| \geq R(r, s - 1)$ gilt. Im ersten Fall, wenn M ein rotes K_s hat, dann hat auch der ursprüngliche Graph eines und wir sind fertig. Andernfalls hat M ein blaues K_{r-1} und somit hat $M \cup \{v\}$ ein blaues K_r nach der Definition von M . Der zweite Fall ist analog. Somit ist die Behauptung wahr und wir haben den Beweis für 2 Farben abgeschlossen.

Eine Verstärkung des Arguments führt zur strikten Ungleichung, wenn sowohl $R(r - 1, s)$ als auch $R(r, s - 1)$ gerade sind.

Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

ChatGPT verwechselt “Graphen” mit “Graphen bis auf Isomorphie”. Wenn es 1024 zählt, sind das alle Graphen. Wenn es 6 zählt, sind das nur Graphen bis auf Isomorphie. Daher zieht es Äpfel von Kartoffeln ab...

Bis auf Isomorphie gibt es 5 Graphen mit 5 Knoten und $\chi(G) \geq 4$: Man nimmt K_4 , fügt einen weiteren Knoten hinzu und verbindet ihn mit 0, 1, 2, 3 oder 4 anderen Knoten. Eine genaue Zählung zeigt, dass es 958 Graphen mit 5 Knoten und $\chi(G) \leq 3$ gibt, was 29 Graphen bis auf Isomorphie entspricht.

Diskrete Mathematik – Sommersemester 2025

Übungsblatt 8

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden. Die Bonusübung kann bis zu +5 Bonuspunkte geben (daher sollte man sie nicht zu seiner Priorität machen).

Erinnern wir uns an einige Notationen zu Folgen positiver Zahlen:

$u_n = O(v_n)$ falls es ein $C \geq 0$ gibt, so dass $u_n \leq C v_n$ für alle hinreichend großen n .

$u_n \sim v_n$ für $n \rightarrow +\infty$, wenn $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow +\infty$.

Man kann Äquivalente multiplizieren (oder dividieren), das heißt wenn $u_n \sim v_n$ und $u'_n \sim v'_n$, dann gilt $u_n u'_n \sim v_n v'_n$ und $\frac{u_n}{u'_n} \sim \frac{v_n}{v'_n}$.

Aufgabe 1

[Hockey-Stick-Identität]

Wir wollen die folgende „Hockey-Stick-Identität“ mit verschiedenen Methoden beweisen:

$$\text{für alle } r \leq n, \quad \sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

1. Beweise die Hockey-Stick-Identität unter Verwendung der Pascal-Identität und einer Rekursion nach n .
2. Fixiere eine Menge von $n+1$ Personen.
 - (a) Auf wie viele Arten kann man eine Gruppe von $r+1$ Personen aus einer Menge von $n+1$ Personen bilden?
 - (b) Beschrifte $n-r+1$ dieser Personen mit den Zahlen $1, \dots, n-r+1$: Für ein gegebenes $k \in [1, n-r+1]$, auf wie viele Arten kann man eine Gruppe von $r+1$ Personen bilden, deren kleinste Beschriftung k ist?
 - (c) Leite daraus die Hockey-Stick-Identität ab.
3. Sei x ein Symbol und $X = 1 + x$.
 - (a) Beweise, dass $X^r + \dots + X^n = \frac{1}{x}(X^{n+1} - X^r)$.
 - (b) Bestimme den Koeffizienten von x^r auf beiden Seiten und beweise die Hockey-Stick-Identität.

Aufgabe 2

[Ungerade und unterschiedliche Partitionen]

Für ein festes n , zeige, dass es genauso viele Partitionen $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ gibt, wobei $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 1$ mit allen λ_i ungerade und $\sum_i \lambda_i = n$, wie es Partitionen

(μ_1, \dots, μ_r) gibt, wobei $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_r \geq 1$ und alle Teile verschieden sind und $\sum_j \mu_j = n$.

Eine Möglichkeit hierzu besteht darin, eine Bijektion zwischen beiden Partitionstypen darzustellen.

Hinweis: Verwende die Binärzerlegung auf eine clevere Weise.

Aufgabe 3

[Singmaster Satz]

Für $k \neq 1$ wollen wir $N(k) = \#\left\{(n, r); \binom{n}{r} = k\right\}$ schätzen. Insbesondere wollen wir Singmasters Satz beweisen: $N(k) = O(\log k)$, wenn $k \rightarrow +\infty$.

1. Zeige, dass $N(k)$ für $k \neq 1$ endlich ist. Genauer, zeige, dass $N(k) \leq \frac{k(k-1)}{2}$.
2. Betrachte die Funktionen $b \mapsto \binom{a+b}{a}$ für festes a und $a \mapsto \binom{a+b}{a}$ für festes b . Leite daraus ab, dass wenn s so ist, dass $k \leq \binom{2s}{s}$, dann gilt $N(k) \leq 2s$.
3. Zeige, dass $2^m \leq \binom{2m}{m}$ für $m \geq 1$, und beweise Singmasters Satz.

N.B. Eine bessere Schätzung ist bekannt: $N(k) = O\left(\frac{\log \log \log k}{(\log \log k)^3} \log k\right)$, aber es wird vermutet, dass $N(k) = O(1)$, und der größte bekannte Wert von $N(k)$ ist $N(3003) = 8$ (getestet bis $k = 2^{48}$).

Aufgabe 4

[Nützliche Schranken für Binomialkoeffizienten]

1. Zeige die linke Ungleichung in

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{n}{k}\right)^k e^k$$

2. Verwende, dass für alle $k \geq 1$ gilt $(1 + \frac{1}{k})^k \leq e$, um zu zeigen, dass

$$\frac{1}{k!} \geq \left(\frac{e}{k}\right)^k.$$

Leite daraus die rechte Seite der obigen Ungleichung ab.

3. Sei $c \in [0, \frac{1}{2}]$ eine reelle Zahl, und definiere

$$H(c) = -c \log_2 c - (1-c) \log_2(1-c).$$

Nutze, dass für $n \rightarrow +\infty$ gilt

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

um zu zeigen, dass, wenn $k = cn$, dann

$$\binom{n}{k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi c(1-c)n}} 2^{H(c)n}.$$

4. Leite das Äquivalent für die Catalan-Zahlen her:

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{n^{3/2} \sqrt{\pi}}.$$

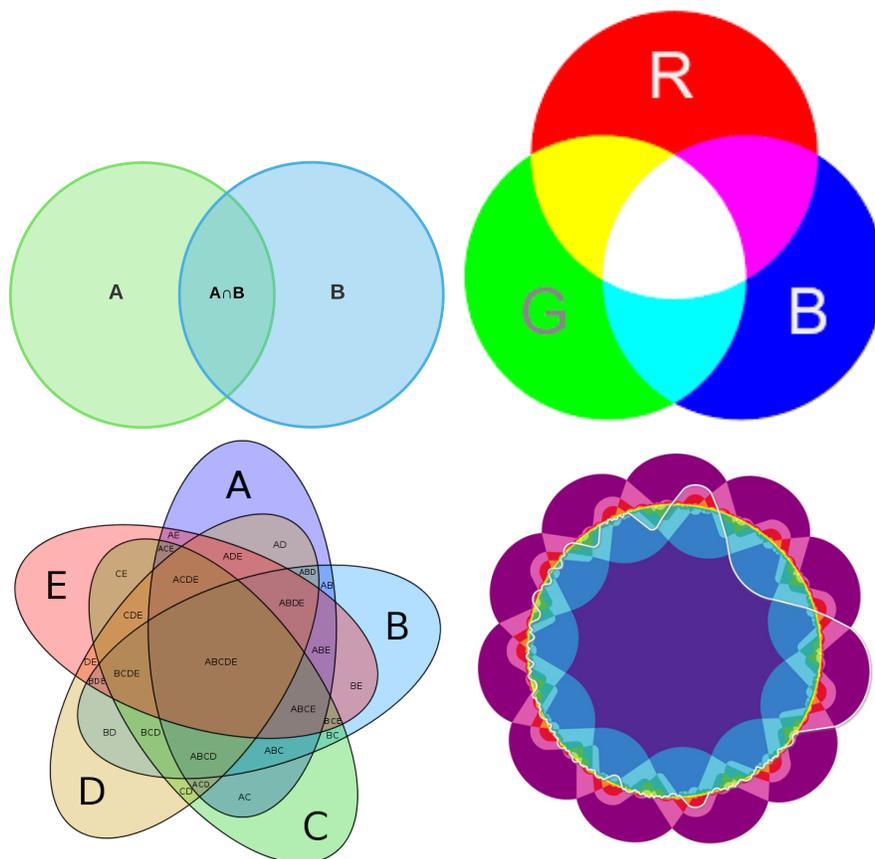


Abbildung 19: Symmetrische Venn-Diagramme für $n \in \{2, 3, 5, 11\}$. Das für 11 heißt *Newroz* und wurde im Juli 2012 entdeckt (jede Region ist violett gefärbt, und die Farbe ändert sich je nach Anzahl der sich überschneidenden Regionen).

Aufgabe 5 [Bonus – Symmetrisches Venn-Diagramm]
 Sie zeichnen eine geschlossene Kurve in der Ebene², und nennen S die Region innerhalb dieser Form. Sie drehen diese Form S um ein n -tel einer vollen Umdrehung und färben jede Kopie in ihrer eigenen Farbe. Wie durch Magie sehen Sie vor Ihren Augen **alle** möglichen Mischungen der Farben, die Sie verwendet haben (siehe Figure 19).

Zeigen Sie, dass n eine Primzahl ist.

Abgabe: 18.06.2025 vor 23:59

²Eine geschlossene Kurve in der Ebene ist das Bild einer stetigen Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(0) = f(1)$, aber so viel Formalismus brauchen Sie nicht.

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

ChatGPT hat mir das gesagt (es ist ein echtes Copy-Paste aus der kostenlosen Version von ChatGPT):

“ Für n , wir betrachten die Menge der Binomialkoeffizienten

$$S_n = \left\{ \binom{m}{k} \mid 0 \leq k \leq m \leq n \right\}$$

und definieren

$$a_n = \min(\mathbb{N} \setminus S_n)$$

als die kleinste natürliche Zahl, die *kein* Binomialkoeffizient für ein $m \leq n$ ist.

Wir interessieren uns für Werte von n , so dass

$$a_n = n + 4.$$

Wir stellen fest, dass für $n = 13$ die Menge der Binomialkoeffizienten S_{13} alle natürlichen Zahlen bis einschließlich 16 enthält, aber *nicht* 17. Daher gilt:

$$a_{13} = 17 = 13 + 4,$$

was die Bedingung erfüllt.

Somit ist $n = 13$ die kleinste solche Zahl, für die $a_n = n + 4$ gilt. ”

Das ist falsch, erklären Sie mir, warum.

Aufgabe 7

[kombinatorische Identitäten]

Zeigen Sie durch kombinatorische Überlegungen, dass

$$\sum_{j=1}^{n-1} j(n-j) = \sum_{i=2}^n \binom{i}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

Hinweis: Betrachten Sie alle Untermengen von $\{1, \dots, n+1\}$ mit drei Elementen und zählen Sie diese geeignet ab.

Aufgabe 8

[Chu-Vandermonde Identitäten]

Seien k, n, m natürliche Zahlen.

1. Bestimmen Sie den Koeffizienten von x^k in $(1+x)^{n+m}$
2. Beweisen Sie:

$$\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}$$

Hinweis: Nutzen Sie $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{n+m}$

3. Beweisen Sie: $\sum_k \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Aufgabe 9 [Chu-Vandermonde-Identität, Version 2]
 Beweise die Chu-Vandermonde-Identität (Aufgabe 3.2), indem du n rote Kugeln und m blaue Kugeln nimmst und auf zwei Weisen zählst, wie viele Möglichkeiten es gibt, k Kugeln aus dieser Sammlung von $n + m$ Kugeln auszuwählen.

Aufgabe 10 [Invertierbare Matrizen]
 Zähle die Anzahl der Elemente von $GL_n\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\right)$ für $n \geq 1$ und p Primzahl.

Aufgabe 11 [schwache und starke Zahlpartitionen]
 Seien $n, r \geq 1$ natürliche Zahlen. Eine *schwache r -Partition* von n ist eine Folge $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ natürlicher Zahlen $\lambda_i \geq 0$, so dass $n = \lambda_1 + \dots + \lambda_r$. Gilt $\lambda_i \geq 1$ für $1 \leq i \leq r$, so heißt λ *starke r -Partition* von n .

1. Wie viele schwache bzw. starke 2-Partitionen von n gibt es?
2. Zeigen Sie: Die Anzahl der schwachen r -Partitionen von $n - r$ ist gleich der Anzahl der starken r -Partitionen von n .

Aufgabe 12 [Trinomialsatz]

1. Sei $a_{n,i,j}$ die Anzahl der Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{x, y, z\}$, die genau i -mal den Buchstaben x , j -mal den Buchstaben y enthalten. Zum Beispiel:

$$a_{4,1,1} = |\{xyzxz, xzyxz, xzzyz, yxzzz, yzxxz, yzzxz, zxyxz, zxzyz, zzyxz, zyzxz, zzyxz\}| = 12$$

Zeigen Sie: $a_{n,i,j} = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}$.

2. Beweisen Sie den *Trinomialsatz*:

$$(x + y + z)^n = \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{n,i,j} x^i y^j z^{n-i-j}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $w = x + y$. Dann ist $(x + y + z)^n = (w + z)^n$ und man kann den Binomialsatz benutzen.

3. Leiten Sie aus 2., zwei verschiedene Ausdrücke für die Anzahl der Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{x, y, z\}$ her.

Aufgabe 13 [Binomialkoeffizienten und Kongruenz]
 Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $\binom{p}{k}$ durch p teilbar ist, außer wenn $k \in \{0, p\}$. Beweisen Sie, dass $(a + b)^p - (a^p + b^p)$ durch p teilbar ist, für alle ganzen Zahlen a und b .

Discrete Mathematics – Loesungblatt 8

Aufgabe 1

[Hockey-Stick-Identität]

1. Wenn $r = n$, ist die Identität trivial (beide Seiten sind 1). Angenommen, die Identität gilt für ein beliebiges n und für alle $r \leq n$, dann haben wir:

$$\sum_{k=r}^{n+1} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r} + \sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r} + \binom{n+1}{r+1} = \binom{n+2}{r+1}.$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.

- (a) Es gibt $\binom{n+1}{r+1}$ Möglichkeiten, eine Gruppe von $r+1$ Personen aus einer Menge von $n+1$ Personen zu bilden.
- (b) Wenn k die kleinste Beschriftung in der Gruppe ist, dann gibt es niemanden mit Beschriftung zwischen 1 und $k-1$. Somit entspricht das der Wahl einer Gruppe von r Personen aus einer Menge von $n-(k-1)$ Personen (plus der Person mit der Beschriftung k): Es gibt $\binom{n-k+1}{r}$ Möglichkeiten.
- (c) Es gibt eine Bijektion zwischen den Möglichkeiten, eine Gruppe von $r+1$ Personen aus einer Menge von $n+1$ Personen zu bilden, und den Paaren $(k, \text{eine Gruppe von } r+1 \text{ Personen mit kleinstem Element } k)$. Zur Begründung: Jede Gruppe enthält eine beschriftete Person (da es nur r unbeschriftete Personen gibt), und jede Gruppe hat ein eindeutiges Minimum. Über diese Bijektion erhält man somit die Hockey-Stick-Identität.
2. (a) Über die bekannte geometrische Summenformel gilt:

$$X^r + \dots + X^n = \frac{X^r - X^{n+1}}{1 - X} = \frac{1}{x}(X^{n+1} - X^r).$$

- (b) Auf der linken Seite ist der Koeffizient von x^r in $X^k = (1+x)^k$ gleich $\binom{k}{r}$ (nach dem binomischen Lehrsatz). Auf der rechten Seite ist der Koeffizient von x^r der Koeffizient von x^{r+1} in $(1+x)^{n+1} - (1+x)^r$, also $\binom{n+1}{r+1} - 0$. Damit erhält man wieder die Hockey-Stick-Identität.

Aufgabe 2

[Ungerade und unterschiedliche Partitionen]

Nehmen wir eine Partition von n in verschiedene Teile $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_r \geq 1$. Für jeden geraden Teil $\mu_j = 2x$ ersetzen wir diesen durch zwei Teile des Werts x . Wenn x ungerade ist, haben wir eine Partition in ungerade Teile erhalten, andernfalls können wir den Prozess wiederholen, um eine Partition von n zu erhalten, die nur ungerade Teile enthält. Auf diese Weise definieren wir eine Abbildung f von Partitionen mit verschiedenen Teilen zu Partitionen mit ungeraden Teilen.

Konstruktionsweise des Kehrwerts von f : Nehmen wir $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 1$ als eine Partition von n in ungerade Teile. Angenommen, λ_j wird p Mal wiederholt (das bedeutet, dass $\lambda_j = \lambda_{j'}$ für p verschiedene Werte von j'), wobei

möglicherweise $p = 1$ gilt. Schreibe $p = \sum_{i \in I} 2^i$ (die Binärzerlegung von p), und ersetze die p Kopien von λ_j durch $\mu_i = \lambda_j \times 2^i$ für $i \in I$. Eine Neuordnung von μ führt zu einer Partition in verschiedene Teile, da alle ganzen Zahlen eine **eindeutige** Weise haben, als $k \times 2^i$ mit k ungerade geschrieben zu werden (man nehme einfach die Primfaktorzerlegung der Zahl und isoliert die Zweierpotenzen).

Ein kurzer Notizzettel zeigt, dass diese beiden Konstruktionen wechselseitig zueinander sind und somit eine Bijektion zwischen ungeraden und verschiedenen Partitionen entsteht (daher gibt es die gleiche Anzahl von beiden).

Aufgabe 3

[Satz von Singmaster]

1. Wenn $n > k$, dann gilt $\binom{n}{r} > k$ für alle $r \in \{1, \dots, n-1\}$, und außerdem gilt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \neq k$ für alle n . Daher sind die möglichen Werte von n und r , sodass $\binom{n}{r} = k$, auf den (inneren) Teil des Pascalschen Dreiecks beschränkt, der über der k -ten Zeile liegt, das heißt $n \leq k$ und $1 \leq r \leq n-1$. Es gibt $\frac{k(k-1)}{2}$ solcher Paare (n, r) , was beweist, dass $N(k) \leq \frac{k(k-1)}{2} < +\infty$.
2. Die Abbildungen $f_a : b \mapsto \binom{a+b}{a}$ für festes a und $f_b : a \mapsto \binom{a+b}{b}$ für festes b sind streng monoton steigend. Folglich, wenn $\binom{a+b}{b} = k$ für ein bestimmtes b und festes a , dann gilt $\binom{a+b}{a} \neq k$ für alle anderen b (und dasselbe a); und das Gleiche gilt symmetrisch. Nun, wenn $k \leq \binom{2s}{s}$, dann gilt, wenn $k = \binom{a+b}{a}$, dass $a \leq s$ und $b \leq s$ (weil f_a und f_b steigend sind). Außerdem führt jede Wahl von a zu höchstens einer möglichen Lösung für $\binom{a+x}{a} = k$, und jede Wahl von b auch, sodass die Anzahl der Lösungen höchstens ist: (die Anzahl der möglichen a) + (die Anzahl der möglichen b) $\leq s + s = 2s$, d.h. $N(k) \leq 2s$.
3. Für $m \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 (2m)! &= \prod_{k=1}^{2m} k \\
 &= \prod_{k=1}^m (2k) \prod_{k=0}^{m-1} (2k+1) \\
 &\geq 2^m \prod_{k=1}^m k \prod_{k=0}^{m-1} k \\
 &\geq 2^m (m!)^2
 \end{aligned}$$

Daher gilt $2^m \leq \frac{(2m)!}{(m!)^2} = \binom{2m}{m}$, und somit gilt für ein festes k , dass das kleinste s , sodass $k \leq \binom{2s}{s}$, $\binom{2(s-1)}{s-1} \leq k$ erfüllt, also $2^{s-1} \leq k$, was impliziert, dass $s \leq 1 + \log_2 k$. Schließlich gilt $N(k) \leq 2s \leq 2 + \frac{2}{\log 2} \log k = O(k)$.

Aufgabe 4

[Nützliche Schranken für Binomialkoeffizienten]

1. Ein kurzer Krickel zeigt, dass für alle $x \in [1, k-1]$ gilt:

$$\frac{n}{k} \leq \frac{n-x}{k-x}.$$

Daher folgt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \frac{n-1}{k-1} \frac{n-2}{k-2} \cdots \frac{n-k+1}{1} \geq \frac{n}{k} \frac{n}{k} \frac{n}{k} \cdots \frac{n}{k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k.$$

2. Für die obere Schranke beachten wir, dass

$$\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{(k+1)^k}{k!} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \frac{k^k}{k!} \leq e \cdot \frac{k^k}{k!}.$$

Per Induktion erhält man: $\frac{1}{k!} \leq \frac{e^k}{k^k}$. Folglich gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!} \leq \left(\frac{n}{k}\right)^k e^k.$$

3. Mithilfe der Stirling-Formel $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \binom{n}{cn} &= \frac{n!}{(cn)!((1-c)n)!} \\ &\sim \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{\left(\frac{cn}{e}\right)^{cn} \sqrt{2\pi cn} \cdot \left(\frac{(1-c)n}{e}\right)^{(1-c)n} \sqrt{2\pi(1-c)n}} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{c(1-c)}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{c^c(1-c)^{1-c}}\right)^n \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi c(1-c)n}} 2^{H(c)n} \end{aligned}$$

4. Da $H\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ gilt, erhalten wir durch Einsetzen von n durch $2n$ in die vorherige Formel und $c = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \sim \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 2n}} 2^{2n},$$

was zur gewünschten Form führt.

Aufgabe 5

[Bonus – Symmetrisches Venn-Diagramm]

Betrachte die farbigen Teilregionen, die der Mischung von k verschiedenen Farben entsprechen. Einerseits gibt es $\binom{n}{k}$ solcher Teilregionen, da jede Region einer Auswahl von k Farben unter den n verwendeten Farben entspricht. Da die Zeichnung symmetrisch ist, kann man andererseits mit einer Teilregion beginnen und alle anderen Teilregionen betrachten, die man durch (mehrfache) Drehungen um ein n -tel einer vollen Umdrehung erhält. Dies unterteilt die Sammlung der Teilregionen in n Teile gleicher Größe, daher gilt: $n \mid \binom{n}{k}$.

Das bedeutet, dass $\frac{1}{n} \binom{n}{k}$ für alle k eine ganze Zahl ist, insbesondere für einen Primteiler p von n mit $p \neq n$. Aber:

$$\frac{1}{n} \binom{n}{p} = \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)}{p!}.$$

Der Nenner dieses Bruchs hat p als Faktor, aber der Zähler nicht (da $p \mid n$, wissen wir, dass p keinen $j \in \{n-p+1, \dots, n-1\}$ teilt). Daher ist der rechte Ausdruck keine ganze Zahl, weil p teilerfremd zu $(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)$ ist.

Folglich ist n eine Primzahl (es hat keinen anderen Primteiler als sich selbst).

Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

ChatGPT kann nicht zählen: $a_{13} = 14$, da 14 kein Binomialkoeffizient für $n \leq 13$ ist (drucke ein großes Pascalsches Dreieck aus). Tatsächlich habe ich kein n mit $a_n = n + 4$ für $n \leq 300$ gefunden.

Aufgabe 7

[kombinatorische Identitäten]

Zu zeigen ist

$$\sum_{j=1}^{n-1} j(n-j) = \sum_{i=2}^n \binom{i}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

Um diese Identität zu zeigen, überlegen wir uns, dass alle 3 Ausdrücke dasselbe zählen. Zunächst wissen wir aus Satz 1.3 (c), dass $\binom{n+1}{3}$ gerade die 3-elementigen Teilmengen von $[n+1]$ zählt. Wir zeigen im folgenden, dass auch die anderen beiden Ausdrücke entsprechend interpretiert werden können.

Als erstes klassifizieren wir die 3-elementigen Teilmengen von $[n+1]$ nach ihrem mittleren Element. Sei $A = \{i, j, k\} \subseteq [n+1]$ mit $i < j < k$. Dann gilt $2 \leq j \leq n$. Wir bezeichnen mit M_j die Menge der 3-elementigen Teilmengen von $[n+1]$ mit mittlerem Element j , wobei $2 \leq j \leq n$. Wir bestimmen nun die Anzahl der Elemente in M_j . Um eine Menge A in M_j festzulegen, müssen wir das kleinste und größte Element von A wählen. Für das kleinste Element gibt es $j-1$ Möglichkeiten, für das grösste gibt es $(n+1)-j$ Möglichkeiten. Mit der Produktregel folgt $|M_j| = (j-1)(n+1-j)$. Da $\binom{[n+1]}{3} = \dot{\cup}_{j=2}^n M_j$ gilt, folgt mit der Summenregel

$$\binom{n+1}{3} = \left| \binom{[n+1]}{3} \right| = \sum_{j=2}^n |M_j| = \sum_{j=2}^n (j-1)(n+1-j) = \sum_{j=1}^{n-1} j(n-j).$$

Dies zeigt, eine der zu zeigenden Gleichheiten.

Für die zweite Gleichheit klassifizieren wir die 3-elementigen Teilmengen von $[n+1]$ entsprechend ihres letzten Elements. Sei $A = \{i, j, k\} \subseteq [n+1]$ mit $i < j < k$. Dann gilt $3 \leq k \leq n+1$. Sei N_k die Menge der 3-elementigen Teilmengen von $[n+1]$ mit maximalem Element k , wobei $3 \leq k \leq n+1$. Wir bestimmen im folgenden die Anzahl der Elemente von N_k . Um eine Menge A in N_k festzulegen, müssen wir das kleinste und mittlere Element wählen. Da k

das maximale Element von A ist, gibt es für die anderen beiden Elemente $\binom{k-1}{2}$ Wahlmöglichkeiten. Damit gilt $|N_k| = \binom{k-1}{2}$. Da $\binom{[n+1]}{3} = \dot{\cup}_{k=3}^{n+1} N_k$ folgt mit der Summenregel

$$\binom{n+1}{3} = \left| \binom{[n+1]}{3} \right| = \sum_{k=3}^{n+1} |M_k| = \sum_{k=3}^{n+1} \binom{k-1}{2} = \sum_{k=2}^n \binom{k}{2}.$$

Dies zeigt die zweite Gleichheit.

Aufgabe 8

[Chu-Vandermonde Identitäten]

1. Nach Newtons Binomialformel haben wir $(1+x)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k$, sodass der Koeffizient von x^k $\binom{n+m}{k}$ ist.
2. Andererseits gilt:

$$(1+x)^{n+m} = (1+x)^n (1+x)^m = \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^j \right) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} \binom{n}{i} \binom{m}{j} \right) x^k.$$

Durch Identifikation des Koeffizienten erhalten wir die Chu-Vandermonde-Formel: $\sum_{i+j=k} \binom{n}{i} \binom{m}{j} = \binom{n+m}{k}$ (ersetze i durch $k-j$). Eine gute Übung ist es auch, einen kombinatorischen Beweis für diese Identität zu finden.

Aufgabe 9

[Chu-Vandermonde-Identität, Version 2]

Auf der einen Seite gibt es $\binom{n+m}{k}$ Möglichkeiten, k Bälle aus einer Sammlung von $n+m$ Bällen auszuwählen. Auf der anderen Seite bedeutet das Auswählen von k Bällen aus einer Sammlung von $n+m$ Bällen, dass man j Bälle aus einer Sammlung von n Bällen und $k-j$ Bälle aus einer Sammlung von m Bällen auswählt, wobei j ein beliebiger ganzzahliger Wert zwischen 0 und k sein kann. Sieht man das Problem auf diese Weise, gibt es $\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}$ Möglichkeiten, k Bälle aus einer Sammlung von $n+m$ Bällen auszuwählen.

Aufgabe 10

[Invertierbare Matrizen]

Eine Matrix in $GL_n(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}})$ ist einfach eine Sammlung von n Vektoren, die linear unabhängig sind: (v_1, \dots, v_n) .

Wenn $n=1$, gibt es $p-1$ Möglichkeiten, weil jede der n Koordinaten von v_1 eine beliebige Zahl von 0 bis $p-1$ sein kann, aber $v_1 \neq \mathbf{0}$.

Wähle beliebige $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$ linear unabhängig (für $k+1 \leq n$). Unabhängigkeit bedeutet, dass (v_1, \dots, v_k) linear unabhängig ist und v_{k+1} nicht als $\sum_{j=1}^k a_j v_j$ geschrieben werden kann, mit $a_j \in \{0, \dots, p-1\}$. Daher gibt es für jede Auswahl von unabhängigen (v_1, \dots, v_k) $n^p - p^k$ gültige Auswahlmöglichkeiten für v_{k+1} (n^p Vektoren in $(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}})^n$, von denen p^k verboten sind).

Folglich gilt $\#GL_n(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}) = \prod_{k=0}^{n-1} (n^p - p^k)$.

Aufgabe 11

[schwache und starke Zahlpartitionen]

- Die starken 2-Partitionen von n sind gegeben durch $(i, n - i)$ für $1 \leq i \leq n - 1$, d.h. es gibt $n - 1$ viele. Bei schwachen 2-Partitionen kommen zusätzlich noch die Partitionen $(0, n)$ und $(n, 0)$ hinzu, d.h. es gibt $n + 1$ viele.
- Wir müssen zeigen, dass die Anzahl der schwachen r -Partitionen von $n - r$ gleich der Anzahl der geordneten r -Partitionen von n ist. Sei dazu

$$\mathcal{P}_1 := \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) : \lambda_i \geq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq r, \lambda_1 + \dots + \lambda_r = n - r\}$$

die Menge der schwachen r -Partitionen von $n - r$ und sei

$$\mathcal{P}_2 := \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) : \lambda_i \geq 1 \text{ für } 1 \leq i \leq r, \lambda_1 + \dots + \lambda_r = n\}$$

die Menge der r -Partitionen von n . Wir betrachten folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &\rightarrow \mathcal{P}_2 \\ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) &\mapsto \Phi(\lambda) = (\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_r + 1). \end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung Φ *wohldefiniert* ist. Sei dazu $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathcal{P}_1$. Aus $\lambda_i \geq 0$ folgt bereits $\lambda_i + 1 \geq 1$ für $1 \leq i \leq r$. Und wegen $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = n - r$ gilt auch $(\lambda_1 + 1) + \dots + (\lambda_r + 1) = (n - r) + r = n$. Damit ist $\Phi(\lambda)$ eine r -Partition von n , d.h. $\Phi(\lambda) \in \mathcal{P}_2$.

Φ ist außerdem *injektiv*, denn sind $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_2$, so dass

$$\Phi(\lambda) = (\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_r + 1) = (\mu_1 + 1, \dots, \mu_r + 1) = \Phi(\mu),$$

so folgt direkt $\lambda_i = \mu_i$ für $1 \leq i \leq r$, d.h. $\lambda = \mu$.

Weiterhin ist Φ *surjektiv*. Denn ist $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathcal{P}_2$, so folgt wie im Beweis der Wohldefiniertheit, dass $\lambda' := (\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_r - 1) \in \mathcal{P}_1$ gilt und zusätzlich ist $\Phi(\lambda') = \lambda$.

Insgesamt ist Φ also eine Bijektion und nach der Gleichheitsregel folgt $\#\mathcal{P}_1 = \#\mathcal{P}_2$.

Aufgabe 12

[Trinomialsatz]

- Die Anzahl $a_{n,i,j}$ der Wörter der Länge n im Alphabet $\{x, y, z\}$, die genau i viele x und j viele y enthalten ist:

$$\begin{aligned} &|\{i - \text{elem. Teilmenge von } [n]\}| \cdot |\{j - \text{elem. Teilmenge von } [n - i]\}| = \\ &\binom{n}{i} \binom{n-i}{j} = \\ &\frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!} = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 (x + y + z)^n &= (x + z)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i z^{n-i} = \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (y + z)^{n-i} = \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} y^j z^{n-i-j} = \\
 &= \sum_{0 \leq i+j \leq n} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} x^i y^j z^{n-i-j} = \\
 &= \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{n,i,j} x^i y^j z^{n-i-j}.
 \end{aligned}$$

3. Sei $A_{n,i,j}$ die Menge der Wörter der Länge n im Alphabet $\{x, y, z\}$, die genau i viele x und j viele y enthalten.

$$\begin{aligned}
 |\text{Wörter der Länge } n \text{ im Alphabet } \{x, y, z\}| &= \\
 \sum_{0 \leq i+j \leq n} |A_{n,i,j}| &= \\
 \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{n,i,j} &= \\
 (1 + 1 + 1)^n &= 3^n.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 13

[Binomialkoeffizienten und Kongruenzen]

Zunächst ist $\binom{p}{1} = p$ durch p teilbar.

Angenommen, $\binom{p}{k}$ ist für ein $1 \leq k \leq p-2$ durch p teilbar. Dann gilt

$$\binom{p}{k+1} (k+1) = \binom{p}{k} (p-k-1).$$

Da p den rechten Term teilt, teilt es auch den linken. Da p teilerfremd zu $k+1$ ist (weil p prim ist und $0 < k+1 < p$), folgt, dass p auch $\binom{p}{k+1}$ teilt. Per Induktion folgt, dass p alle $\binom{p}{k}$ für $1 \leq k \leq p-1$ teilt.

Daraus folgt:

$$(a + b)^p = a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k b^{p-k} \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

Das funktioniert nur, weil p prim ist!

Diskrete Mathematik – Sommersemester 2025

Übungsblatt 9

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden. Die Bonusübung kann bis zu +5 Bonuspunkte geben (daher sollte man sie nicht zu seiner Priorität machen).

Aufgabe 1 [Permutationen von Multimengen]
Sei $A = \{a_1, \dots, a_\ell\}$ eine Menge und M die Multimenge über A , bei der das Element a_i mit Vielfachheit k_i auftritt.

Eine Permutation von M ist eine geordnete Liste der Elemente von M . Es bezeichne P_M die Menge der Permutationen von M .

(M kann als Wort der Länge n mit Buchstaben aus A betrachtet werden, eine Permutation von M entspricht dann einem Anagramm.)

1. Zeigen Sie: Sind A und B Mengen und $\varphi : A \rightarrow B$ eine surjektive Abbildung, so gilt $|A| = \sum_{b \in B} |\varphi^{-1}(\{b\})|$
2. Konstruieren Sie eine surjektive Abbildung $\varphi : [n]^{\langle n \rangle} \rightarrow P_M$ mit $|\varphi^{-1}(\{\pi\})| = \prod_{i=1}^{\ell} k_i!$
3. Folgern Sie: $|P_M| = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{\ell} k_i!}$
4. Wie viele Anagramme des Wortes DISCRETEMATHEMATICS existieren (auch wenn sie keinen Sinn ergeben)?

Aufgabe 2 [Inklusions-Exklusions-Ungleichungen]
Seien A_1, \dots, A_n endliche Mengen.

1. Zeigen Sie: $\sum_i |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| \leq |\bigcup_{i=1}^n A_i| \leq \sum_i |A_i|$
2. Zeigen Sie mittels einer Rekursion über K , dass für $K \leq m$ gilt (mit $\binom{m}{m+1} = 0$):

$$\sum_{k=1}^K (-1)^{k+1} \binom{m}{k} = 1 - (-1)^K \binom{m-1}{K}$$

3. Zeigen Sie, dass für ungerades $K \in [n]$ gilt:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \leq \sum_{k=1}^K (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

Und zeigen Sie, dass bei geradem $K \in [n]$ die Ungleichung umgekehrt ist.

- Für ein festes K , zeigen Sie, dass die vorige Ungleichung genau dann eine Gleichheit ist, wenn der Durchschnitt jeder Auswahl von $K + 1$ Mengen unter A_1, \dots, A_n leer ist.

Aufgabe 3 [Taschengeld mit Einschränkungen]
 Sie haben 30 Münzen à 1€. Sie möchten diese an Ihre 3 Kinder verteilen.

- Zeigen Sie, dass die Anzahl der Möglichkeiten, 30 Münzen à 1€ an Ihre 3 Kinder zu verteilen, dem Koeffizienten von X^{30} in $P(X) = (1 + X + X^2 + \dots + X^{30})^3$ entspricht.
- Nun soll jedes Kind mindestens 1€ bekommen: Ändern Sie das Polynom P , sodass die Anzahl der Möglichkeiten dem Koeffizienten von X^{30} im neuen Polynom entspricht.
- Das älteste Kind soll mindestens 10€ bekommen: Ändern Sie das Polynom P , sodass die Anzahl der Möglichkeiten dem Koeffizienten von X^{30} im neuen Polynom entspricht.
- Die beiden jüngsten Kinder sollen jeweils mindestens 8€ bekommen: Ändern Sie das Polynom P , sodass die Anzahl der Möglichkeiten dem Koeffizienten von X^{30} im neuen Polynom entspricht.
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, 30 Münzen à 1€ ohne jegliche Einschränkungen an Ihre 3 Kinder zu verteilen?

Aufgabe 4 [Konvergenzradius und asymptotisches Verhalten]
 Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge nichtnegativer (ganzer) Zahlen, und definiere die Reihe $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Wir wollen das asymptotische Wachstum von a_n für $n \rightarrow +\infty$ anhand „leicht zugänglicher“ Eigenschaften von $A(z)$ abschätzen. In dieser Aufgabe sei $z \in \mathbb{R}$.

Wir definieren den *Radius* der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ als das größte r , so dass $a_n \leq (\frac{1}{r})^n$ für alle hinreichend großen n (d.h. es existiert ein n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $a_n \leq (\frac{1}{r})^n$).

- Für die Folge $a_n = 5^n$, berechne den Radius r , bestimme die erzeugende Funktion $A(z)$, und zeige, dass $\sum_{n \geq 0} a_n z^n \rightarrow +\infty$ für $z > r$; hingegen $\sum_{n \geq 0} a_n z^n \not\rightarrow +\infty$ für $z < r$.
- Fixiere eine Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ mit Radius r . Zeigen Sie, dass $\sum_{n \geq 0} a_n z^n \rightarrow +\infty$ für alle $z > r$.
- Umgekehrt, zeigen Sie, dass $\sum_{n \geq 0} a_n z^n \not\rightarrow +\infty$ für alle $z < r$.

Hinweis: Wählen Sie n_0 geschickt und multiplizieren Sie die Glieder der Reihe mit $\frac{r^n}{r^n}$.

Der Radius ist eine Abschätzung für das exponentielle Wachstum einer Folge: Falls $(a_n)_{n \geq 0}$ den Radius r besitzt, dann kann man vermuten, dass a_n ungefähr r^n entspricht für $n \rightarrow +\infty$ (gewöhnlich ist $a_n = F(n) r^n$, wobei F ein rationaler Bruch ist – dies soll aber keine strenge mathematische Aussage sein).

Sie haben gerade gezeigt, dass der Radius der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ gleich „dem kleinsten z_0 ist, für das $A(z_0)$ entweder nicht definiert ist oder für das $A(z)$ für alle $z = z_0 + \varepsilon$ (für alle kleinen $\varepsilon > 0$) nicht definiert ist“.

Dies ist nicht mathematisch präzise, aber Sie dürfen es für die nächste Frage (und im Leben) verwenden.

4. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle (falls Sie die letzten 2 Zeilen nicht ausfüllen, verlieren Sie keine Punkte; für das Ausfüllen gibt es jedoch auch keine Zusatzpunkte):

Folge a_n	Reihenformel	r^n
Exponentiell ρ^n für $\rho > 0$	$A(z) = \frac{1}{1-\rho z}$	
Fibonacci-Zahlen	$A(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$	
Catalan-Zahlen	$A(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$	
Motzkin-Zahlen	$A(z) = \frac{1-z-\sqrt{1-2z-3z^2}}{2z^2}$	
Schröder-Zahlen	$A(z) = \frac{1-z-\sqrt{1-6z+z^2}}{2z^2}$	
Cayley-Zahlen	$A(z) = ze^{A(z)}$	
Wurzelbäume mit 2 oder 3 Kindern	$\frac{A(z)}{1+A(z)^2+A(z)^3} = z$	

Aufgabe 5

[Bonus – Kodierung einer Menge durch ihre Summe]

Ein Student versucht, etwas zu implementieren. Es wird eine Menge von 10 Anfangszahlen gegeben, die alle zweistellige Zahlen sind. Von Zeit zu Zeit wird der Benutzer eine Teilmenge dieser Zahlen angeben, und der Student muss diese in den Speicher seines Computers speichern, um sie dem Benutzer später zurückgeben zu können. Um Speicherplatz zu sparen, beschließt der Student, die folgende Methode zu implementieren: Er wird nur die Summe der Zahlen speichern, die der Benutzer ihm gibt (und der Student hofft, dass er einen Algorithmus finden wird, um die gesamte Teilmenge aus ihrer Summe wiederherzustellen).

Zeigen Sie, dass es keine Hoffnung gibt, dass diese Methode funktioniert, unabhängig von den 10 Anfangszahlen.

Zeigen Sie, dass diese Methode funktioniert, wenn die Anfangszahlen $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ sind.

Abgabe: 25.06.202 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

Aufgabe 7

[Teilbarkeit von Summen]

Fixiere k ganze Zahlen (nicht unbedingt positiv) n_1, \dots, n_k . Zeige, dass es eine Teilmenge $X \subseteq [k]$ gibt, so dass die Summe $\sum_{i \in X} n_i$ durch k teilbar ist.

Tipp: Betrachte die Summen $n_1 + \dots + n_j$ für jedes $j \in [k]$ und überlege, was passiert, falls keine dieser Summen durch k teilbar ist.

Aufgabe 8

[Fleissnersche Raster]

Die von Colonel Fleissner entwickelten rotierenden Raster wurden in einem von den Deutschen im Ersten Weltkrieg verwendeten Verschlüsselungsverfahren eingesetzt. Ein solches Raster besteht aus einem Quadrat mit Seitenlänge 6. Dieses Quadrat wird in ein Raster aus 36 kleineren gleichen Quadraten (alle mit Seitenlänge 1) unterteilt, und 9 dieser kleinen Quadrate werden ausgeschnitten. Es muss folgende Eigenschaft gelten: Die Löcher, die man erhält, wenn man das Raster in seiner Ausgangsposition, nach einer Vierteldrehung, nach einer halben Drehung oder nach einer Dreivierteldrehung betrachtet, überschneiden sich nie. Somit kann nach den Drehungen jedes der 36 Felder genau einmal von einem Loch besetzt sein.

1. Wie viele solche Raster gibt es?
2. Für welche Werte von n kann ein Fleissnersches $n \times n$ -Raster konstruiert werden? Wie viele solche Raster gibt es?

Aufgabe 9

[Dreiecke aus Punkten in der Ebene]

Sei $n > 0$ eine ganze Zahl. Sei S eine Menge von n Punkten in der Ebene, so dass keine drei verschiedenen Punkte von S auf einer Geraden liegen. Zeige, dass es höchstens $\frac{1}{3}n(n-1)$ gleichseitige Dreiecke gibt, die aus drei verschiedenen Punkten aus S gebildet werden.

Tipp: Zähle die passenden Paare doppelt.

Aufgabe 10

[Punkte und Kreise]

Seien n und k zwei positive ganze Zahlen. Sei S eine Menge von n Punkten in der Ebene, so dass keine drei verschiedenen Punkte von S auf einer Geraden liegen, und so dass für jeden Punkt $\mathbf{p} \in S$ ein Kreis mit Mittelpunkt \mathbf{p} existiert, der mindestens k Punkte von S enthält. Zeige, dass

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

Discrete Mathematics – Loesungblatt 9

Aufgabe 1

[Permutationen von Multimengen]

1. Sei $b \in B$. Weil φ surjektiv ist, existiert $a \in A$ mit $\varphi(a) = b$. Des Weiteren ist $\varphi(a)$ eindeutig bestimmt. Insgesamt gilt $\bigcup_{b \in B} \varphi^{-1}(b) = A$, und $\varphi^{-1}(b) \cap \varphi^{-1}(b') = \emptyset$ für $b \neq b'$ und es folgt die Behauptung.
2. Wir definieren $\varphi : [n]^{(n)} \rightarrow P_M$, $\sigma \mapsto \varphi(\sigma)$ mit $\varphi(\sigma)(m_i) = m_{\sigma(i)}$. Offensichtlich ist φ wohldefiniert und surjektiv. Sei $m \in M$ ein Element mit Vielfachheit k . Für $\pi \in P_M$ und $\sigma, \sigma' \in \varphi^{-1}(\pi)$ gilt $\sigma' = \sigma \circ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_\ell$, wobei τ_i eine Permutation von $\{\sum_{j < i} k_j + 1, \dots, \sum_{j \leq i} k_j\}$ ist. Da es für jedes i genau $k_i!$ viele solche Permutationen gibt, folgt die Behauptung.
3. Kombinieren von 1. und 2. gibt:

$$n! = |[n]^{(n)}| = \left| \sum_{\pi \in P_M} \varphi^{-1}(\{\pi\}) \right| = |P_M| \prod_{i=1}^{\ell} k_i!$$

4. Ein Anagramm (wenn uns die Bedeutung egal ist) ist einfach eine Permutation der Buchstaben des Wortes. Daher schreiben wir die Buchstaben des Wortes DISCRETEMATHEMATICS als eine Multimenge. Es gibt 18 Buchstaben, genauer gesagt: 1 A, 2 C, 1 D, 3 E, 1 H, 2 I, 2 M, 1 R, 2 S, 3 T. Folglich ist die Anzahl der Anagramme dieses Wortes: $\frac{18!}{1!2!1!3!1!2!2!1!2!3!} = \frac{18!}{2^4 \cdot 6^2} = 11\,115\,232\,128\,000$.

Aufgabe 2

[Inklusions-Exklusions-Ungleichungen]

1. Betrachte $X = \{(a, i) ; i \in [n], a \in A_i\}$. Offenbar gilt $|X| = \sum_i |A_i|$, und es gibt eine Injektion $X \rightarrow \bigcup_i A_i$ gegeben durch $(a, i) \mapsto a$. Daher gilt: $|\bigcup_i A_i| \leq \sum_i |A_i|$.
Andererseits, betrachte $a \in \bigcup_i A_i$.
Falls a genau zu einem der A_i gehört, so wird es genau einmal in der Summe $\sum_i |A_i|$ gezählt, aber nicht in der Summe $\sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j|$.
Allgemeiner, wenn a zu mehreren A_i gehört, sagen wir zu $k(a)$ von ihnen, dann wird es einmal in $\sum_i |A_i|$ gezählt, und $\binom{k(a)}{2}$ -mal in $\sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j|$.
Mit der Konvention $\binom{1}{2} = 0$ ergibt sich: $\sum_i |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| = \sum_{a \in \bigcup_i A_i} 1 - \binom{k(a)}{2} \leq \sum_{a \in \bigcup_i A_i} 1 = |\bigcup_i A_i|$.
2. Fixiere m . Für $K = 1$ gilt: $(-1)^2 \binom{m}{1} = m = 1 - (-1)^1 \binom{m-1}{1}$.
Erinnere dich an Pascals Identität (ungewöhnlich geschrieben): $\binom{m}{K+1} - \binom{m-1}{K} = \binom{m-1}{K+1}$.

Angenommen die Formel gilt für ein K , dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{K+1} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} &= (-1)^{K+2} \binom{m}{K+1} + \sum_{k=1}^K (-1)^{k+1} \binom{m}{k} \\ &= (-1)^K \binom{m}{K+1} + 1 - (-1)^K \binom{m-1}{K} \\ &= 1 - (-1)^{K+1} \binom{m}{K+1} \end{aligned}$$

3. Fixiere $K \in [n]$. Die rechte Seite ist der übliche Term des Inklusions-Exklusions-Prinzips, außer dass die Summe bei K statt bei n endet. Wie beim Beweis des Inklusions-Exklusions-Prinzips betrachten wir jedes $x \in \bigcup_i A_i$ und zählen seine Multiplizität in der rechten Summe.

Fixiere $x \in \bigcup_i A_i$. Für $T \subseteq [n]$ trägt das Element x zur Summe bei genau dann bei, wenn $x \in A_T := \bigcap_{i \in T} A_i$. In der rechten Summe werden nur $T \subseteq [n]$ mit $|T| \leq K$ betrachtet, daher ergibt sich die Gesamtsumme von x zu $\sum_{T \subseteq [n], |T| \leq K, x \in A_T} (-1)^{|T|+1}$.

Sei $m := |\{i \in [n] ; x \in A_i\}|$ die Anzahl der A_i , zu denen x gehört, dann gibt es $\binom{m}{k}$ Mengen T der Größe k mit $x \in A_T$ (für $k \geq 1$).

Daraus folgt: Der Beitrag von x ist $\sum_{k=1}^{\min(m, K)} (-1)^{k+1} \binom{m}{k}$.

Wenn $\min(m, K) = m$, ergibt sich daraus 1 (siehe Vorlesung); andernfalls, gemäß Teil 2., ist es $1 - (-1)^K \binom{m-1}{K}$.

Letzteres ist größer als 1 für gerade K und kleiner als 1 für ungerade K . Daher ist die rechte Summe größer als $\sum_{x \in \bigcup_i A_i} 1 = |\bigcup_i A_i|$ für gerade K und kleiner für ungerade K .

Dies liefert die behaupteten Ungleichungen.

4. Um einen Gleichheitsfall zu haben, muss für alle x gelten, dass $\min(K, m) = m$ (wobei m wie zuvor die Anzahl der A_i ist, zu denen x gehört). Anders ausgedrückt, es darf kein x geben, das zu mehr als K der A_i gehört. Dies ist äquivalent zur angegebenen Aussage.

Aufgabe 3

[Taschengeld mit Einschränkungen]

1. Eine Möglichkeit, 30 Münzen à 1€ auf 3 Kinder zu verteilen, entspricht einer (geordneten) Partition von 30 in 3 Teile. Man kann die Polynomform direkt aus der Vorlesung schreiben.

Oder man entwickelt:

$$\left(\sum_{a=0}^{30} X^a \right)^3 = \sum_{a,b,c=0}^{30} X^a X^b X^c = \sum_{k=0}^{90} \left(\sum_{a+b+c=k} 1 \right) X^k$$

Die Zahl $\sum_{a+b+c=k} 1$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, eine Menge mit k Elementen in 3 Teile zu unterteilen (wobei jeder Teil zwischen 0 und 30 Elemente haben kann).

2. Verwende das Polynom $(X + \dots + X^{30})^3$ und lies die obige Argumentation erneut, wobei du 0 durch 1 ersetzt.
3. Verwende das Polynom $(1 + X + \dots + X^{30})^2 \cdot (X^{10} + X^{11} + \dots + X^{30})$.
4. Verwende das Polynom $(X^8 + X^9 + \dots + X^{30})^2 \cdot (1 + X + \dots + X^{30})$.
5. Mit einem Taschenrechner kann man $(1 + \dots + X^{30})^3$ entwickeln oder alle Tripel (a_1, a_2, a_3) betrachten, wobei $a_i \geq 0$ und $a_1 + a_2 + a_3 = 30$ gilt. Es gibt 31 mögliche Werte für a_1 , danach $31 - a_1$ Werte für a_2 , und wenn a_1 und a_2 festgelegt sind, gibt es genau 1 Möglichkeit für a_3 . Insgesamt also:

$$\sum_{a_1=0}^{30} (31 - a_1) = \sum_{i=1}^{31} i = \frac{31 \cdot (31 + 1)}{2} = 31 \cdot 16 = 496$$

mögliche Verteilungen.

Aufgabe 4 [Konvergenzradius und asymptotisches Verhalten]

1. Sei $r = \frac{1}{5}$. Es gilt $a_n \leq \left(\frac{1}{r}\right)^n$ für alle n , und r ist die größte Zahl mit dieser Eigenschaft. Außerdem:

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} (5z)^n = \frac{1}{1 - 5z}$$

Für $z > \frac{1}{5}$ konvergiert $a_n z^n$ nicht gegen 0, wenn $n \rightarrow +\infty$, daher divergiert die Reihe gegen $+\infty$ (beachte, dass $A(z)$ in diesem Fall negativ ist, was für eine Reihe, die positive ganze Zahlen zählt, ein Problem darstellt); für $z < \frac{1}{5}$ konvergiert die Reihe gegen $A(z)$ (endlich und positiv). Beachte: $A\left(\frac{1}{5}\right)$ ist nicht definiert.

2. Per Definition von r gilt für jedes $z > r$: $a_n z^n \geq 1$ für unendlich viele n , also ist die Reihe $\sum_n a_n z^n$ nach unten durch unendlich viele Einsen beschränkt und divergiert gegen $+\infty$.
3. Sei $z < r$, und wähle n_0 , sodass $a_n y^n \leq 1$ für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \sum_n a_n z^n &= \sum_n a_n r^n \cdot \left(\frac{z}{r}\right)^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n + \sum_{n \geq 0} 1 \cdot \left(\frac{z}{r}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n + \frac{1}{1 - \frac{z}{r}} \end{aligned}$$

Somit konvergiert die Reihe $\sum_n a_n z^n$ (die erste Summe ist endlich). (Korrekt wäre, den Radius als Supremum aller y zu definieren, für die $a_n \leq \left(\frac{1}{y}\right)^n$ für große n gilt, und den Beweis entsprechend mit $\frac{y^n}{y^n}$ zu wiederholen, für $z < y < r$.)

4. Begründungen siehe unterhalb der Tabelle: Hauptidee ist, die kleinste „Polstelle“ von $A(z)$ zu berechnen, z. B. den kleinsten Wert z , für den $A(z) = +\infty$ gilt oder $A(z)$ eine Wurzel aus einer negativen Zahl enthält.

Folge a_n	Begründung	r^n
Exponentiell ρ^n für $\rho > 0$	$A(\frac{1}{\rho}) = +\infty$	ρ^n
Fibonacci-Zahlen	kleinste Nullstelle von $1 - z - z^2$ ist $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$(\frac{2}{-1+\sqrt{5}})^n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$
Catalan-Zahlen	$\sqrt{1 - 4z}$ undefiniert für $z > \frac{1}{4}$	4^n
Motzkin-Zahlen	$\sqrt{1 - 2z - 3z^2}$ für $z > \frac{1}{3}$ undefiniert	3^n
Schröder-Zahlen	$\sqrt{1 - 6z + z^2}$ undefiniert für $3 - 2\sqrt{2} < z < 3 + 2\sqrt{2}$	$(\frac{1}{3-2\sqrt{2}})^n = (3 + 2\sqrt{2})^n$
Cayley-Zahlen	siehe unten (a)	e^n
Wurzelbäume mit 2 oder 3 Kindern	siehe unten (b)	$\leq 2,611^n$

(.) Angenommen, es gibt eine Funktion f mit $f(A(z)) = z$, also $A(z) = f^{-1}(z)$ **dort wo f^{-1} definiert ist**. Der kleinste Wert z , für den f^{-1} nicht definiert ist, ist jener, bei dem $f(z)$ denselben Wert wie $f(x)$ für $x < z$ annimmt. Dies geschieht für $z = z_0 + \varepsilon$, wobei $f'(z_0) = 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig klein (siehe Skizze). Daher ist der Konvergenzradius $r = \frac{1}{f'(z_0)}$ mit $f'(z_0) = 0$.

(a) Hier ist $f(x) = \frac{x}{e^x}$, also $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$. Somit ist $f'(1) = 0$ und $f(1) = \frac{1}{e}$, daher ist der Radius e .

(b) Hier ist $f(x) = \frac{x}{1+x^2+x^3}$, also $f'(x) = \frac{1-x^2-2x^3}{(1+x^2+x^3)^2}$. Das Polynom $1 - x^2 - 2x^3$ hat genau eine reelle Nullstelle $z_0 \approx 0,657$, und $\frac{1}{f'(z_0)} \approx 2,611$.

Aufgabe 5

[Bonus – Kodierung einer Menge durch ihre Summe]

Für eine Menge von Zahlen A sei $S(A) = \sum_{a \in A} a$ die Summe der Zahlen in A . Für eine Menge A der Größe höchstens 10, die aus zweistelligen Zahlen besteht, gilt: $S(A) \leq S(\{99, 98, 97, \dots, 90\}) = 945$. Fixieren wir nun eine Menge X von Startzahlen und betrachten alle Teilmengen $A \subseteq X$. Da $|X| = 10$, gibt es $2^{10} = 1024$ solcher Teilmengen A . Wenn jede Teilmenge A nur durch Kenntnis ihrer Summe $S(A)$ wiedergefunden werden kann, bedeutet das, dass S injektiv auf den Teilmengen von X ist (d.h. keine zwei verschiedenen Teilmengen von X haben die gleiche Summe). Dies impliziert, dass S $2^{10} = 1024$ Elemente (alle Teilmengen von X) auf höchstens 945 Bilder (alle möglichen Summen einer Menge der Größe höchstens 10) abbildet. Daher kann S nicht injektiv sein, und es wird unmöglich sein, jede Teilmenge A aus der Kenntnis von X und $S(A)$ wiederzufinden, unabhängig von der Wahl des X .

Wenn $X = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ ist, dann gilt nicht nur $|X| = 7$, sondern auch, dass die Startzahlen Potenzen von zwei sind. Da die Darstellung jeder Zahl

in binärer Form einzigartig und eindeutig ist, reicht die Kenntnis der Summe aus, um die Teilmenge wiederherzustellen (und alle Summen zwischen 0 und 127 sind möglich).

Sie können nun versuchen, X der Größen 8 und 9 zu finden, die aus zweistelligen Zahlen bestehen, sodass keine zwei Teilmengen die gleiche Summe haben, oder beweisen, dass es solche nicht gibt.

Diskrete Mathematik – Sommersemester 2025

Übungsblatt 10

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden. Die Bonusübung kann bis zu +5 Bonuspunkte geben (daher sollte man sie nicht zu seiner Priorität machen).

Aufgabe 1

[Inversion]

Erinnern Sie sich daran, dass $x^n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$.

Für $k, n \in \mathbb{N}$ können die *Stirling-Zahlen erster Art* $s(n, k)$ definiert werden durch folgende Gleichung von Polynomen

$$X^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} s(n, k) X^k.$$

1. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Anzahl aller Abbildungen $f : [n] \rightarrow [m]$ gegeben ist durch

$$m^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) m^k.$$

2. Folgern Sie aus (i), dass die Stirling-Zahlen zweiter Art die folgende Polynomgleichung erfüllen:

$$X^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) X^k.$$

3. Beweisen Sie die *Stirling-Inversionsformel*: Für zwei Folgen (u_n) , (v_n) gilt, dass

$$v_n = \sum_{k=0}^n S(n, k) u_k \text{ für alle } n \geq 0$$

genau dann, wenn

$$u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} s(n, k) v_k \text{ für alle } n \geq 0.$$

4. Folgern Sie, dass

$$\sum_{k \geq 0} S(n, k) (-1)^{k-m} s(k, m) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = m, \\ 0 & \text{falls } n \neq m. \end{cases}$$

Aufgabe 2

[Wörter mit Bedingungen]

Betrachte die Wörter (d.h. endliche Folgen) der Länge n , die wir mit den Buchstaben a, b, c schreiben können, wobei verlangt wird, dass die Anzahl der verwendeten a gerade ist, die Anzahl der verwendeten b ungerade ist, und die Anzahl der verwendeten c beliebig sein darf.

Bezeichne mit w_n die Anzahl solcher Wörter und mit $W(z) = \sum_{n \geq 0} w_n \frac{z^n}{n!}$ die zugehörige exponentielle erzeugende Funktion.

1. Berechne w_n für $n \leq$ (Erinnere dich: 0 ist gerade und nicht ungerade).
2. Sei $A(z)$ die exponentielle erzeugende Funktion der Anzahl von Wörtern der Länge n mit einer geraden Anzahl von a (und ohne b oder c).
Definiere $B(z)$ und $C(z)$ entsprechend und zeige, dass $W(z) = A(z) \cdot B(z) \cdot C(z)$ gilt.
3. Zeige, dass $C(z) = e^z$, dann $A(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ und $B(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$.
4. Leite daraus $W(z)$ und w_n her.

Aufgabe 3

[Cayley-Zahlen]

Die Fragen 1. und 2. dienen dem vollständigen Verständnis des Themas: Sie erhalten keine Punkte für deren Bearbeitung, und Sie verlieren keine Punkte, wenn Sie sie nicht bearbeiten. Sie können den Text einfach durchlesen und mit Frage 3 beginnen.

Sei \mathcal{C} eine Kollektion unendlich vieler verschiedener Objekte (z. B. Graphen, Teilmengen, Pfade), von denen jedes eine bestimmte Größe besitzt (z. B. Anzahl der Knoten, Kardinalität, Länge), die eine ganze Zahl ist.

Sei \mathcal{C}_i die Kollektion der Listen in \mathcal{C} der Länge i und $c_i = |\mathcal{C}_i|$. Sei $C(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ die zugehörige (gewöhnliche) erzeugende Funktion und $\Gamma(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{n!} z^n$ die zugehörige exponentielle erzeugende Funktion.

1. Zeige, dass der Koeffizient von z^n in der Reihe $C(z)^k$ die Anzahl der Sequenzen von Objekten $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ zählt, wobei $\alpha_i \in \mathcal{C}$ und die Größen der $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sich zu n summieren.
2. Leite daraus ab, dass der Koeffizient von z^n in $\frac{1}{1-C(z)}$ die Anzahl der Sequenzen von Objekten aus \mathcal{C} zählt, deren Größen sich zu n summieren.
3. Zeige, dass der Koeffizient von $\frac{z^n}{n!}$ in der Reihe $\frac{1}{k!} \Gamma(z)^k$ die Anzahl der Möglichkeiten angibt, eine Partition von $[n]$ in k Teile zu wählen und jedem Teil P dieser Partition ein Objekt $\alpha \in \mathcal{C}_{|P|}$ zuzuordnen. (Erinnere dich: Die Teile einer Partition sind nicht geordnet.)
4. Leite daraus ab, dass der Koeffizient von z^n in $e^{\Gamma(z)}$ die Anzahl der Möglichkeiten angibt, eine Partition von $[n]$ zu wählen und jedem Teil P dieser Partition ein Objekt $\alpha \in \mathcal{C}_{|P|}$ zuzuordnen.

Sie haben bereits Anwendungen des obigen Satzes auf (gewöhnliche) erzeugende Funktionen gesehen.

Sei a_n die Anzahl der Möglichkeiten, eine Mauer der Länge n und Höhe 2 aus Dominosteinen zu bauen, die vertikal oder horizontal platziert werden können. Hier ist eine Mauer eine Sequenz, gebildet aus der Kollektion $\mathcal{C} = \{\square, \mathbb{H}\}$.

Die Größe eines Dominos ist seine horizontale Breite (weil wir eine Mauer der Breite n wollen): Die Größe von \mathbb{H} ist 1, und von \square ist 2.

Also ist $C(z) = z + z^2$ und $A(z) = \frac{1}{1-C(z)} = \frac{1}{1-z-z^2}$, was tatsächlich die (gewöhnliche) erzeugende Funktion der Fibonacci-Zahlen ist.

Die nächsten Fragen betreffen eine Anwendung des zweiten Satzes.

5. Betrachte Bäume auf den Knoten $[n]$ mit einem **rot** markierten Knoten (alle anderen sind schwarz). Wir nennen \mathcal{T} die Kollektion aller markierten, beschrifteten Bäume ohne Größenbeschränkung.
Zeige, dass es eine Bijektion zwischen markierten, beschrifteten Bäumen auf n Knoten und Partitionen von $[n-1]$ gibt, wobei jedem Teil P der Partition ein Baum auf $|P|$ Knoten zugeordnet wird.
6. Leite daraus ab, dass die exponentielle erzeugende Funktion $T(z)$ der markierten, beschrifteten Bäume folgende Gleichung erfüllt:

$$T(z) = z e^{T(z)}$$

Man kann daraus ableiten, dass es n^{n-1} markierte, beschriftete Bäume auf n Knoten gibt und n^{n-2} beschriftete Bäume (bei denen alle Knoten gleich behandelt werden).

Aufgabe 4

[Zahlencodes]

Es sei $f(n)$ die Anzahl der Zahlencodes der Länge n , in denen nur die Ziffern 0, 1 und 2 vorkommen, und in denen niemals zwei Nullen hintereinanderstehen.

- (i) Es sei $f(0) = 1$. Geben Sie eine rekursive Gleichung für $f(n)$ an und begründen Sie Ihre Antwort.
- (ii) Berechnen Sie $\sum_{n \geq 0} f(n)x^n$.

Fall Sie im Aufgabenteil (i) keine rekursive Gleichung aufgestellt haben, verwenden Sie im Folgenden alternativ die Gleichung

$$f(n) = 3f(n-1) + 2f(n-2)$$

mit $f(0) = 1$ und $f(1) = 2$. Diese Gleichung entspricht nicht der Lösung aus (i)!

- (iii) Nutzen Sie Ihre Ergebnisse aus (ii), um eine Folge a_n in Abhängigkeit von $f(n)$ so zu bestimmen, dass gilt

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{1}{1-2x-2x^2}.$$

Fall Sie im Aufgabenteil (ii) mit der alternativen Gleichung gerechnet haben, bestimmen Sie stattdessen eine Folge a_n in Abhängigkeit von $f(n)$ so, dass gilt

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{1}{1-3x-2x^2}.$$

Aufgabe 5 [Bonus – Fibonacci-Zahlen und Prüfungsbögen]

Du organisierst eine Prüfung mit 20 Fragen.

Jede Frage kann entweder mit „Wahr“ oder „Falsch“ beantwortet werden.

Für jede Frage bewertest du die Antworten von 17 712 Studierenden.

Am Ende stellst du leider fest, dass kein einziger Studierender es geschafft hat, zwei aufeinanderfolgende Fragen korrekt zu beantworten.

Etwas beunruhigt dich jedoch: Zwei Studierende haben genau dieselben Antworten auf alle Fragen gegeben. . . Ist das normal, oder solltest du genauer hinschauen, ob sie vielleicht abgeschrieben haben?

Hinweis: Du solltest damit beginnen, rekursiv die Anzahl der Folgen in $\{0, 1\}^n$ zu zählen, in denen keine zwei Einsen aufeinander folgen. Dann denke an einen italienischen Mathematiker, der um 1170 geboren wurde.

Abgabe: 02.07.2025 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

Aufgabe 7

[Gerade und ungerade Teilmengen]

Wir zeigen auf zwei Arten, dass $[n]$ genauso viele Teilmengen gerader Kardinalität wie Teilmengen ungerader Kardinalität besitzt.

1. Zeige, dass

$$\sum_{\substack{A \subseteq [n] \\ |A| \text{ gerade}}} 1 - \sum_{\substack{A \subseteq [n] \\ |A| \text{ ungerade}}} 1 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0,$$

und schlieÙe daraus.

2. Fixiere $x \in [n]$. Zeige, dass die folgende Abbildung f eine Bijektion zwischen der Menge der geraden Teilmengen und der Menge der ungeraden Teilmengen ist:

$$f : A \mapsto \begin{cases} A \cup \{x\} & \text{wenn } x \notin A, \\ A \setminus \{x\} & \text{wenn } x \in A. \end{cases}$$

Aufgabe 8

[Anzahl der Lösungen einer Gleichung vom Grad 1]

Sei $a_{n,d}$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$x_1 + \dots + x_n = d,$$

wobei für jedes i gilt, dass x_i eine (nicht-negative) ganze Zahl ist. Wir wollen $a_{n,d}$ berechnen.

Sei E die Menge der Lösungen:

$$E = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid x_1 + \dots + x_n = d\}.$$

Sei F die Menge der streng wachsenden Folgen

$$0 < y_1 < \dots < y_n = n + d.$$

Sei G die Menge der Teilmengen von $\{1, \dots, n + d - 1\}$ mit der Größe $n - 1$.

1. Berechne $a_{1,d}$, $a_{2,d}$, $a_{n,0}$ und $a_{n,1}$.
2. Finde eine Bijektion zwischen E und F .
3. Finde eine Bijektion zwischen F und G .
4. Berechne $a_{n,d}$.

Discrete Mathematics – Loesungblatt 10

Aufgabe 1

[Inversion]

1. Dass die Anzahl aller Abbildungen $f : [n] \rightarrow [m]$ gegeben ist durch m^n , ist ein Resultat der Vorlesung. Für die rechte Seite der angegebenen Gleichheit, zählen wir die gesuchten Abbildungen noch einmal anders ab. Ist $f : [n] \rightarrow [m]$ eine Abbildung, so ist f surjektiv als Abbildung von $[n]$ nach $\text{Bild}(f)$. Letzteres ist stets eine nicht leere Teilmenge von $[m]$. Klassifizieren wir Abbildungen nun nach ihren Bildern, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 m^n &= \sum_{A \subseteq [m]} |\{f : [n] \rightarrow A \text{ surjektiv}\}| \\
 &= \sum_{A \subseteq [m]} S(n, |A|) \cdot |A|! \\
 &= \sum_{k=0}^m \sum_{A \in \binom{[m]}{k}} S(n, k) \cdot k! \\
 &= \sum_{k=0}^m m(m-1) \cdots (m-k+1) S(n, k),
 \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. Dabei haben wir für die dritte Gleichheit verwendet, dass $S(n, 0) = 0$ ist.

2. Wir bemerken, dass es sich bei beiden Seiten der zu zeigenden Polynomgleichung um Polynome in X vom Grad n handelt. Zwei solche Polynome sind gleich, wenn sie an $n+1$ Punkten übereinstimmen. Nach (i) stimmen die beiden Polynome bereits auf \mathbb{N} überein, was die Behauptung zeigt.
3. $\{1, X, \dots, X^n\}$, sowie $\{1, X, X(X-1), \dots, X(X-1) \cdots (X-n+1)\}$ sind jeweils Basen des Vektorraums der Polynome vom Grad $\leq n$. Die entsprechenden Basistransformationen werden mittels der Matrizen $((-1)^{m-k} s(m, k))_{\substack{1 \leq m \leq n \\ 1 \leq k \leq n}}$ bzw. $(S(m, k))_{\substack{1 \leq m \leq n \\ 1 \leq k \leq n}}$ geleistet. Die Behauptung folgt daher direkt aus Satz 2.9 (Inversion) der Vorlesung.
4. Da die Matrizen $T = ((-1)^{m-k} s(m, k))_{\substack{1 \leq m \leq n \\ 1 \leq k \leq n}}$ bzw. $S = (S(m, k))_{\substack{1 \leq m \leq n \\ 1 \leq k \leq n}}$ die beiden Basiswechsellmatrizen zwischen den beiden Basen $\{1, X, \dots, X^n\}$ und $\{1, X, X(X-1), \dots, X(X-1) \cdots (X-n+1)\}$ sind, sind sie insbesondere invers zueinander und es gilt $S \cdot T = E_n$, wobei E_n die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix bezeichnet. Für die Multiplikation der n -ten Zeile von S und der m -ten Spalte von T ergibt sich dann direkt

$$\sum_{k \geq 0} S(n, k) (-1)^{k-m} s(k, m) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = m, \\ 0 & \text{falls } n \neq m. \end{cases}$$

Aufgabe 2

[Wörter mit Bedingungen]

1. Hier sind alle möglichen Wörter mit ≤ 3 Buchstaben, die den Anforderungen entsprechen:

b ,
 bc, cb ,
 $aab, aba, baa, bcc, cbc, ccb, bbb$,

Daraus folgt: $w_0 = 0, w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 7$.

2. Betrachten wir nur zwei Anforderungen, etwa an a und an b , mit den zugehörigen exponentiellen Erzeugenden $A(z)$ und $B(z)$. Dann gilt:

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{p,m \geq 0} a_p b_m \frac{z^{p+m}}{p!m!} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_k a_k b_{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \right) \frac{z^n}{n!}$$

Der mittlere Ausdruck $\sum_k a_k b_{n-k} \binom{n}{k}$ zählt die Anzahl der Möglichkeiten, ein Wort der Länge n zu bilden, das sowohl die Bedingungen für a als auch für b erfüllt (zuerst wähle k , dann entscheide, welche k der n Buchstaben a sein sollen, dann kombiniere mit der Anzahl Wörter der Länge k mit Buchstaben a und der Länge $n-k$ mit Buchstaben b).

Daraus folgt: $A(z) \cdot B(z) \cdot C(z) = W(z)$, wie gewünscht.

3. Es gilt $c_n = 1$ für alle n , also ist $C(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z$. Außerdem gilt

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} = \frac{1}{2} (1 + (-1)^n), \text{ daher ist die erzeugende}$$

$$\text{Reihe } A(z) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (1 + (-1)^n) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}).$$

$$\text{Auf gleiche Weise erhalten wir } B(z) = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}).$$

4. Schließlich:

$$W(z) = e^z \cdot \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) \cdot \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) = \frac{1}{4} (e^{3z} - e^{-z})$$

Durch Koeffizientenvergleich in $W(z)$ erhalten wir:

$$w_n = \frac{1}{4} (3^n - (-1)^n)$$

Bitte überprüfe, dass $n = 0, 1, 2, 3$ die Werte aus Teil (1) ergibt.

Aufgabe 3

[Cayley-Zahlen]

1. Zuerst gilt:

$$C(z)^k = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k \geq 0} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} z^{i_1 + i_2 + \dots + i_k} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_k = n} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} \right) z^n$$

Andererseits entspricht eine Sequenz der Länge k aus Objekten in \mathcal{C} , deren Größen sich zu n summieren, der Form $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, wobei $\alpha_i \in \mathcal{C}_i$ und $i_1 + i_2 + \dots + i_k = n$ gilt.

Daher zählt die große Klammer oben genau diese Anzahl an Möglichkeiten.

2. Es gilt: $\frac{1}{1-C(z)} = \sum_{k \geq 0} C(z)^k$, also zählt der Koeffizient von z^n in $\frac{1}{1-C(z)}$ die Anzahl der Sequenzen von Objekten mit Gesamtlänge n , ohne Einschränkung auf die Länge der Sequenz.
3. Wir haben:

$$\begin{aligned} \Gamma(z)^k &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k \geq 0} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} \frac{z^{i_1+i_2+\dots+i_k}}{i_1! i_2! \dots i_k!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_k!} \right) \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

Wie viele **geordnete** Partitionen von $[n]$ mit k Teilen, denen jeweils ein Element aus \mathcal{C} zugeordnet ist, gibt es?

Zur Konstruktion einer solchen geordneten Partition \mathcal{P} benötigt man: (1) eine Partition in Teile P_1, P_2, \dots, P_k mit Kardinalitäten i_1, i_2, \dots, i_k ; und (2) eine Wahl von $\alpha_1 \in \mathcal{C}_{i_1}, \alpha_2 \in \mathcal{C}_{i_2}, \dots, \alpha_k \in \mathcal{C}_{i_k}$.

Die Anzahl der Möglichkeiten in (1) ist:

$$\binom{n}{i_1} \binom{n-i_1}{i_2} \dots \binom{n-i_1-i_2-\dots-i_{k-1}}{i_k} = \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_k!}$$

Die Anzahl der Möglichkeiten in (2) ist $c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k}$.

Daher zählt der Koeffizient von $\frac{z^n}{n!}$ in $\Gamma(z)^k$ genau die Anzahl solcher geordneten Partitionen. Das Teilen durch $k!$ entspricht der Unordnung der Partition.

4. Wir haben $e^{\Gamma(z)} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \Gamma(z)^k$, daher zählt der Koeffizient von $\frac{z^n}{n!}$ in $e^{\Gamma(z)}$ die Anzahl der Partitionen von $[n]$ mit zugeordneten Objekten (Größe = Kardinalität), ohne Einschränkungen bezüglich der Anzahl der Teile.
5. Betrachte einen markierten beschrifteten Baum t mit n Knoten. Entferne den roten Knoten und markiere stattdessen seine Nachbarn rot. Das ergibt einen Wald: also eine Menge beschrifteter markierter Bäume. Die Knotenmenge jedes Baumes ergibt eine Partition von $[n-1]$ ("−1", da der rote Knoten entfernt wurde), wobei jedem Teil ein beschrifteter markierter Baum mit entsprechender Knotenzahl zugeordnet ist.
Umgekehrt: Gegeben eine Partition von $[n-1]$ und zu jedem Teil P_i ein markierter Baum t_i der Größe $|P_i|$, können wir einen markierten Baum mit n Knoten konstruieren, indem wir (1) einen roten Knoten hinzufügen und (2) den markierten Knoten jedes Baumes t_i mit dem roten Knoten verbinden.
Dies liefert die gewünschte Bijektion (Skizzen helfen!).
6. Laut Teil 2 zählt der Koeffizient von z^{n-1} in $e^{T(z)}$ die Anzahl der Partitionen von $[n-1]$ mit zugeordneten markierten beschrifteten Bäumen. Der Koeffizient von z^{n-1} in $\frac{1}{z} T(z)$ zählt die Anzahl beschrifteter markierter Bäume mit n Knoten.
Laut Teil 5 sind dies dieselben Zahlen. Daher:

$$\frac{1}{z} T(z) = e^{T(z)}$$

Aufgabe 4

[Zahlencodes]

- (i) Betrachten wir die erste Zahl. Ist sie 1 oder 2, so können wir sie mit $f(n-1)$ Codes der Länge $n-1$ kombinieren. Ist sie 0, so muss die zweite Zahl 1 oder 2 sein, und wir können den Rest auf $f(n-2)$ Arten wählen. Es gilt also

$$f(n) = 2(f(n-1) + f(n-2)).$$

Außerdem ist $f(0) = 1$ und $f(1) = 3$.

- (ii) Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} f(n)x^n &= \sum_{n \geq 2} (2f(n-1) + 2f(n-2))x^n + f(0) + f(1)x \\ &= 2 \sum_{n \geq 2} f(n-1)x^n + 2 \sum_{n \geq 2} f(n-2)x^n + 1 + 3x \\ &= 2 \sum_{n \geq 1} f(n)x^{n+1} + 2 \sum_{n \geq 0} f(n)x^{n+2} + 1 + 3x \\ &= 2x \sum_{n \geq 1} f(n)x^n + 2x^2 \sum_{n \geq 0} f(n)x^n + 1 + 3x \\ &= 2x \sum_{n \geq 0} f(n)x^n - 2x + 2x^2 \sum_{n \geq 0} f(n)x^n + 1 + 3x \\ &= (2x + 2x^2) \sum_{n \geq 0} f(n)x^n + 1 + x. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$(1 - 2x - 2x^2) \sum_{n \geq 0} f(n)x^n = 1 + x \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} f(n)x^n = \frac{1+x}{1-2x-2x^2}.$$

Alternative:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} f(n)x^n &= \sum_{n \geq 2} (3f(n-1) + 2f(n-2))x^n + f(0) + f(1)x \\ &= 3 \sum_{n \geq 2} f(n-1)x^n + 2 \sum_{n \geq 2} f(n-2)x^n + 1 + 2x \\ &= 3 \sum_{n \geq 1} f(n)x^{n+1} + 2 \sum_{n \geq 0} f(n)x^{n+2} + 1 + 2x \\ &= 3x \sum_{n \geq 1} f(n)x^n + 2x^2 \sum_{n \geq 0} f(n)x^n + 1 + 2x \\ &= 3x \sum_{n \geq 0} a_n x^n - 3x + 2x^2 \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 1 + 2x \\ &= (3x + 2x^2) \sum_{n \geq 0} f(n)x^n + 1 - x. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$(1 - 3x - 2x^2) \sum_{n \geq 0} f(n)x^n = 1 - x \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} f(n)x^n = \frac{1 - x}{1 - 3x - 2x^2}.$$

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - 2x - 2x^2} &= \frac{1 + x}{1 - 2x - 2x^2} \cdot \frac{1}{1 + x} \\ &= \sum_{n \geq 0} f(n)x^n \cdot \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n f(k)(-1)^{n-k} \right) x^n. \end{aligned}$$

$$\text{Also ist } a_n = \sum_{k=0}^n f(k)(-1)^{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^n f(k)(-1)^k.$$

Alternative:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - 3x - 2x^2} &= \frac{1 - x}{1 - 3x - 2x^2} \cdot \frac{1}{1 - x} \\ &= \sum_{n \geq 0} f(n)x^n \cdot \sum_{n \geq 0} x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n f(k) \right) x^n. \end{aligned}$$

$$\text{Also ist } a_n = \sum_{k=0}^n f(k).$$

Aufgabe 5

[Bonus – Futurama's Theorem]

Die Lösung ist hier:

<https://www.youtube.com/watch?v=J65GNFfL94c>

Diskrete Mathematik – Sommersemester 2025

Übungsblatt 11

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden. Die Bonusübung kann bis zu +5 Bonuspunkte geben (daher sollte man sie nicht zu seiner Priorität machen).

Aufgabe 1 [Teilmengen mit Abständen]
Sei a_n die Anzahl der Teilmengen $X \subseteq [n]$, sodass für alle $i, j \in X$ gilt: Wenn $|j - i| < 3$, dann ist $i = j$.

1. Finde eine Gleichung, die einige der Zahlen $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}$ enthält.
2. Leite die (gewöhnliche) erzeugende Funktion der Zahlen a_n her.
3. Zeige durch Ableitung, dass das Polynom $x \mapsto 1 - x - x^3$ genau eine reelle Nullstelle x_o hat.
4. Zeige: $0 < x_o < 1$.
Folgere, dass die beiden anderen (komplex konjugierten) Nullstellen von $1 - x - x^3$ einen Betrag > 1 haben. *Hinweis:* Es handelt sich um eine kombinatorische Aufgabe...

Aufgabe 2 [Katalytische Variablen und Brunnen]
Ein (n, k) -Brunnen ist eine Sammlung von n Kreisen mit Radius 1 (genannt *Münzen*), die in Reihen aus sich berührenden Münzen angeordnet sind, sodass die unterste Reihe (die sogenannte *Basis*) aus k sich berührenden Münzen besteht, und jede andere Münze genau zwei Münzen der vorherigen Reihe berührt, siehe Figure 20.

Sei $f_{n,k}$ die Anzahl der (n, k) -Brunnen, f_n die Anzahl der Brunnen mit n Münzen und c_k die Anzahl der Brunnen, deren Basis k Münzen enthält. Wir möchten $F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n x^n$ berechnen.

1. Zeichne alle Brunnen mit 5 Münzen.
2. Sei $g_{n,k}$ die Anzahl der Brunnen mit n Münzen und einer Basis aus k Münzen, wobei die zweite Reihe $k - 1$ Münzen enthält. Definiere die Reihen $F(x, t) = \sum_{n,k \geq 0} f_{n,k} x^n t^k$ und $G(x, t) = \sum_{n,k \geq 0} g_{n,k} x^n t^k$. Zeige $g_{n,k} = f_{n-k, k-1}$, und folgere: $G(x, t) = xtF(x, xt)$.
3. Betrachte die erste fehlende Münze in der zweiten Reihe eines Brunnen, und zeige: $F(x, t) = 1 + F(x, t) \cdot G(x, t)$.
4. Folgere:

$$F(x, t) = \frac{1}{1 - \frac{xt}{1 - \frac{x^2 t}{1 - \frac{x^3 t}{\dots}}}} \quad \text{und} \quad F(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{1 - \frac{x^2}{1 - \frac{x^3}{\dots}}}}$$

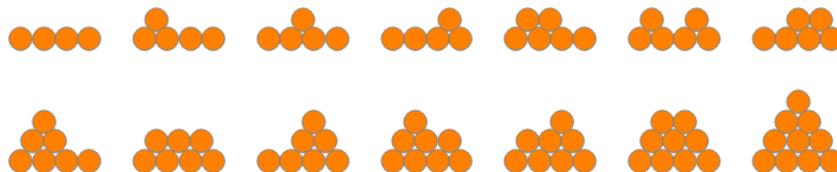


Abbildung 20: Alle Brunnen mit Basis aus 4 Münzen

5. Zeige, dass c_k eine Catalan-Zahl ist, indem du eine Bijektion zwischen Brunnen mit Basisgröße k und Dyck-Pfaden einer bestimmten Länge konstruierst. Folgere:

$$\frac{1}{1 - \frac{t}{1 - \frac{t}{\dots}}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}$$

Hinweis: Betrachte die Münzen, die nicht von anderen Münzen überdeckt werden, und verbinde ihre Mittelpunkte.

Aufgabe 3

[Motzkin-Pfade]

Ein *Motzkin-Pfad* der Länge n ist ein Pfad $\mathcal{P} = ((0, y_0), (1, y_1), \dots, (n, y_n))$ von $(0, 0)$ nach $(n, 0)$, wobei $y_i - y_{i-1} \in \{-1, 0, +1\}$ und $y_i \geq 0$ für alle i gilt.

Wir bezeichnen mit m_n die Anzahl der Motzkin-Pfade der Länge n und mit $M(z) = \sum_{n \geq 0} m_n z^n$ die zugehörige erzeugende Funktion.

1. Zeichne alle Motzkin-Pfade der Längen 2, 3 und 4.
2. Zeige, dass es eine Bijektion gibt zwischen Motzkin-Pfaden der Länge n mit $y_1 = 0$ und Motzkin-Pfaden der Länge $n - 1$.
3. Verwende Ideen von Dyck-Pfaden, um zu zeigen, dass es eine Bijektion gibt zwischen Motzkin-Pfaden mit $y_1 > 0$ und Paaren von Motzkin-Pfaden $(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}')$, wobei die Längen von \mathcal{Q} und \mathcal{Q}' sich zu $n - 2$ summieren.

Hinweis: Betrachte $i_0 \geq 1$ als das kleinste i mit $y_{i_0} = 0$, und teile entsprechend.

4. Folgere: $M(z) = z^2 M(z)^2 + zM(z) + 1$.
5. Löse die Gleichung und erhalte:

$$M(z) = \frac{1}{2z^2} \left(1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2} \right)$$

Aufgabe 4

[Nicht selbst überschneidenden Wege]

Sei a_n die Anzahl der sich nicht selbst überschneidenden Wege in \mathbb{Z}^2 mit n Schritten, wobei der Startpunkt $(0, 0)$ ist und nur Schritte in Richtung Norden N , Osten E und Westen W gemacht werden dürfen. ($N = (1, 0)$, $E = (0, 1)$, $W = (0, -1)$). Man setze $a_0 = 1$.

- (i) Zeigen Sie, dass $a_1 = 3$ gilt und dass für $n \geq 2$ die Rekursion

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

erfüllt ist.

- (ii) Bestimmen Sie Polynome $P(z)$ und $Q(z)$, sodass

$$f_a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei $Q(z)$ minimalen Grad haben soll.

- (iii) Geben Sie eine explizite Darstellung für a_n an.
- (iv) Wie viele Wege gibt es, falls die Einschränkung, dass sich Wege nicht selbst überschneiden dürfen, fallengelassen wird?

Aufgabe 5

[Bonus – Dezimalentwicklung]

Aus einem zufälligen Grund gibst du $0,5 - \sqrt{0,249}$ in deinen Lieblingsrechner ein und siehst folgendes erscheinen:

0,001 001 002 005 014 042 132 ...

Da du dem Kurs sehr aufmerksam gefolgt bist, erkennst du darin den Anfang der Folge der Catalan-Zahlen wieder: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, ...

Leider sind die nächsten drei Ziffern der Dezimalentwicklung von $0,5 - \sqrt{0,249}$ gleich 430, während die nächste Catalan-Zahl 429 ist.

In deinem besten Versuch fragst du deinen Rechner nach $0,5 - \sqrt{0,2499}$ und siehst:

0,0001 0001 0002 0005 0014 0042 0132 0429 1430 4863 ...

Alle Ziffern bis auf die letzten vier stimmen mit den Catalan-Zahlen überein!

Erkläre, warum man in der Dezimalentwicklung von $0,5 - \sqrt{2499 \dots 99}$ (wobei die Ziffer 9 genau n -mal vorkommt) alle Catalan-Zahlen mit höchstens $n + 2$ Stellen sehen wird – mit Ausnahme der letzten.

Abgabe: 09.07.2025 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

Aufgabe 7

[Partitionen und Modulo]

Sei $p(n)$ die Anzahl der ganzzahligen Partitionen von n (d.h. die Anzahl der Möglichkeiten, n als Summe ganzer Zahlen zu schreiben). Wir möchten zeigen, dass $p(5m+4)$ durch 5 teilbar ist für alle $m \geq 0$.

Für zwei erzeugende Funktionen $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ und $B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ schreiben wir $A(z) \equiv B(z) [k]$, wenn für alle n gilt: $a_n \equiv b_n [k]$ (d.h. $b - a$ ist durch k teilbar). Das Symbol \equiv zwischen erzeugenden Funktionen verhält sich wie gewöhnlich: wenn $A(z) \equiv B(z) [k]$ und $C(z) \equiv D(z) [k]$, dann gilt auch $A(z) + C(z) \equiv B(z) + D(z) [k]$ und $A(z) \cdot C(z) \equiv B(z) \cdot D(z) [k]$, usw. Wir nehmen an, dass alle in dieser Aufgabe verwendeten unendlichen Summen und Produkte konvergieren.

1. Erinnere dich an die erzeugende Funktion von $p(n)$.
2. Schreibe $\frac{1}{(1-z)^k}$ als Summe, und zeige dann, dass $\frac{1}{(1-z)^5} \equiv \frac{1}{1-z} [5]$.
3. Leite daraus ab, dass

$$\frac{(1-z^5)(1-z^{10})(1-z^{15})\dots}{((1-z)(1-z^2)(1-z^3)\dots)^5} \equiv 1 [5].$$

4. Zeige, dass 5 den Koeffizienten von z^{5m+5} in $z \cdot ((1-z)(1-z^2)\dots)^4$ teilt.
5. Verwende folgende Gleichung, um zu zeigen, dass 5 stets $p(5m+4)$ teilt für alle $m \geq 0$:

$$\sum_{n \geq 1} p(n-1)z^n = z((1-z)(1-z^2)\dots)^4 \cdot \frac{(1-z^5)(1-z^{10})\dots}{((1-z)(1-z^2)\dots)^5} \cdot (1+z^5+z^{10}+\dots)(1+z^{10}+z^{20}+\dots)\dots$$

Aufgabe 8

[Wörter, die Wörter vermeiden]

Fixiere ein Alphabet \mathcal{A} (d.h. eine endliche Menge) mit $m = |\mathcal{A}| \geq 2$. Ein Wort über \mathcal{A} ist eine geordnete Folge $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_r)$ mit $p_i \in \mathcal{A}$. Die Länge von \mathbf{p} ist r .

1. Wie viele Wörter der Länge 5 gibt es über dem Alphabet $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$?
2. Sei m die Kardinalität von \mathcal{A} . Wie viele Wörter der Länge r gibt es?
3. Schreibe die erzeugende Funktion $\sum_{r \geq 0} a_r z^r$, wobei a_r die Anzahl der Wörter der Länge r ist.

Fixiere ein Wort \mathbf{p} der Länge r . Wir sagen, dass \mathbf{p} i -selbstkorreliert ist für ein $i \in [r]$, wenn $(p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_r) = (p_1, p_2, \dots, p_{r-i})$, wobei alle Indizes modulo r betrachtet werden. Wir setzen $c_i = 1$, falls \mathbf{p} i -selbstkorreliert ist, und $c_i = 0$ sonst; und definieren das *Selbstkorrelationspolynom* $c(z) = \sum_{i=0}^{r-1} c_i z^i$.

4. Berechne das Selbstkorrelationspolynom für das Wort $\mathbf{p} = (a, a, b, b, a, a)$.

5. Fixiere ein Wort \mathbf{p} . Betrachte ein anderes Wort $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_s)$. Das r -finale Teilwort von \mathbf{q} ist (q_{s-r+1}, \dots, q_s) . Bestimme mit Hilfe von $c(z)$ die erzeugende Funktion (nach Länge) der Wörter \mathbf{q} über dem Alphabet \mathcal{A} , sodass \mathbf{p} gleich dem r -finalen Teilwort von \mathbf{q} ist, aber nicht gleich einem anderen Teilwort von \mathbf{q} .
6. Zeige, dass die erzeugende Funktion (nach Länge) der Wörter \mathbf{q} über dem Alphabet \mathcal{A} , die \mathbf{p} vermeiden (d.h. \mathbf{p} kommt in \mathbf{q} nicht als Teilwort vor), gegeben ist durch:

$$S(z) = \frac{c(z)}{z^r + (1 - mz)c(z)}$$

Aufgabe 9

[Dyck-Pfad-Fläche und markierte Klassen]

Die *Fläche* eines Dyck-Pfads \mathcal{P} ist die Anzahl ganzzahliger Punkte in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die auf oder unter dem Pfad \mathcal{P} liegen. Beispielsweise hat der Pfad $((0, 0), (1, 1), (2, 0))$ Fläche 4. Wir bezeichnen mit b_n die Summe der Flächen aller Dyck-Pfade der Länge $2n$.

1. Zeichne alle Dyck-Pfade der Länge $2 \cdot 3$ und bestimme deren Flächen.
2. Zeige, dass b_n äquivalent ist zur Anzahl der Paare (\mathcal{P}, x) , wobei \mathcal{P} ein Dyck-Pfad ist und x ein Punkt unter oder auf dem Pfad \mathcal{P} in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
3. Schreibe die übliche rekursive Zerlegung von Dyck-Pfaden auf und leite eine Version für die Anzahl solcher Paare (\mathcal{P}, x) ab.
4. Sei eine kombinatorische Klasse $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \dots)$ durch die erzeugende Funktion $C(z) = \sum_{k \geq 0} c_k z^k$ gegeben. Wir definieren die *markierte Klasse* \mathcal{C}^\bullet durch $\mathcal{C}_k^\bullet = \{(\gamma, i); \gamma \in \mathcal{C}_k, i \in [k]\}$. Bestimme die erzeugende Funktion von \mathcal{C}^\bullet in Abhängigkeit von $C(z)$. (Hinweis: Ableitungen sind nützlich.)
5. Schreibe eine funktionale Gleichung, die die erzeugende Funktion $B(z)$ der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit der erzeugenden Funktion $D(z)$ der Dyck-Pfade verbindet.
6. Gib einen (oder mehrere) Beweis(e) dafür an, dass $b_n = 4^n$, mithilfe einer geschickten Bijektion.
7. (Er)schließe daraus die erzeugende Funktion $D(z)$.

Aufgabe 10

[Narayana-Zahlen]

Für einen Dyck-Pfad $\mathcal{P} = ((0, y_0), (1, y_1), \dots, (2n, y_{2n}))$ heißt ein Index $i \in [1, 2n - 1]$ ein *Gipfel*, wenn $y_{i-1} < y_i > y_{i+1}$. Wir bezeichnen mit $p(\mathcal{P})$ die Anzahl der Gipfel eines Dyck-Pfads \mathcal{P} . Wir möchten die erzeugende Funktion in zwei Variablen $N(z, t) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} N_{n,k} t^k z^n$ bestimmen, wobei $N_{n,k}$ die Anzahl der Dyck-Pfade der Länge $2n$ mit k Gipfeln ist. Die Zahlen $N_{n,k}$ heißen Narayana-Zahlen.

1. Berechne die Narayana-Zahlen $N(4, k)$ für alle k , indem du alle Dyck-Pfade zeichnest.
2. Sei für einen Dyck-Pfad \mathcal{P} der kleinste Index i_\circ mit $y_{2i_\circ} = 0$ und $i_\circ > 0$ gegeben. Zeige, dass es eine Bijektion zwischen Dyck-Pfaden \mathcal{P} der Länge $2n$ mit k Gipfeln und $i_\circ = n$ und Dyck-Pfaden der Länge $2(n - 1)$ mit k Gipfeln gibt.

3. Zeige, dass es eine Bijektion zwischen Dyck-Pfaden \mathcal{P} der Länge $2n$ mit k Gipfeln und $i_o < n$ und Paaren von Dyck-Pfaden $(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}')$ gibt, sodass die Summe der Längen von \mathcal{Q} und \mathcal{Q}' gleich $2(n-1)$ ist, die Summe der Gipfelanzahlen k ergibt, und \mathcal{Q}' nicht die Länge 0 hat.
4. Leite daraus her: $N(z, t) = 1 + zN(z, t) + tzN(z, t)(N(z, t) - 1)$.
5. Löse die Gleichung und erhalte:

$$N(z, t) = \frac{1}{2tz} \left(1 + z(t-1) - \sqrt{1 - 2z(t+1) + z^2(t-1)^2} \right)$$

6. Schließe daraus:

$$N_{n,k} = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}$$

7. (Plausibilitätsprüfung) Für $t = 1$ sollte man die gewöhnlichen Catalan-Zahlen erhalten. Setze $t = 1$ in obige Gleichung ein und verifiziere, dass du die Gleichung der Catalan erzeugenden Funktion erhältst. Leite daraus $\sum_k \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}$ ab. Diese Summe kann direkt über die Chu-Vandermonde-Identität berechnet werden.

Aufgabe 11

[Schröder-Wege]

Sei f_n die Anzahl der Pfade $((x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_r, y_r))$ mit $(x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i) \in \{(1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$, wobei $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_r, y_r) = (n, n)$ und $x_i \geq y_i$ für alle i gilt. Ein solcher Pfad heißt Schröder-Weg der Größe n . Die Anzahl solcher Wege sei s_n , und die erzeugende Funktion ist $S(z) = \sum_{n \geq 0} s_n z^n$.

1. Zeichne alle Schröder-Wege der Größe $n \leq 4$.
2. Sei i_o der kleinste Index mit $i_o > 0$ und $x_{i_o} = y_{i_o}$. Zeige, dass es eine Bijektion zwischen Schröder-Wegen der Größe n mit $i_o = 1$ und Schröder-Wegen der Größe $n-1$ gibt.
3. Zeige, dass es eine Bijektion zwischen Schröder-Wegen der Größe n mit $i_o \neq 1$ und Paaren von Schröder-Wegen $(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}')$ gibt, deren Größen sich zu $n-1$ summieren.
4. Leite daraus her: $S(z) = zS(z)^2 + zS(z) + 1$.
5. Löse die Gleichung und erhalte:

$$S(z) = \frac{1}{2z^2} \left(1 - z - \sqrt{1 - 6z + z^2} \right)$$

Aufgabe 12

[Lagrange-Inversionstheorem]

Sei $F : z \mapsto \sum_{k \geq 0} f_k z^k$ eine Funktion mit $f_0 = F(0) \neq 0$. Angenommen, die erzeugende Funktion $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ erfüllt $A(z) = F(A(z))$. Wir nehmen an, dass dann a_n gleich dem Koeffizienten von z^{n-1} in $\frac{1}{n} F(z)^n$ ist. Dies ist das Lagrange-Inversionstheorem.

1. Verwende Lagrange-Inversion zur Berechnung der Anzahl markierter, beschrifteter Bäume, deren exponentielle erzeugende Funktion $T(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ die Gleichung $T(z) = z e^{T(z)}$ erfüllt.

2. Erinnere dich, dass die erzeugende Funktion der Catalan-Zahlen $C(z) = \sum_{n \geq 0} C_n z^n$ die Gleichung $C(z) = C(z)^2 + z$ erfüllt. Verwende Lagrange-Inversion auf $B(z) = C(z) - z$, um erneut die Formel für die Catalan-Zahlen herzuleiten:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Discrete Mathematics – Loesungblatt 11

Aufgabe 1

[Teilmengen mit Abständen]

- Sei \mathcal{X}_n die Menge aller Teilmengen $X \subseteq [n]$, sodass für alle $i, j \in X$ gilt: Wenn $|i-j| < 3$, dann ist $i = j$. Fixiere ein $X \in \mathcal{X}_n$: Entweder $n \in X$ oder $n \notin X$. Falls $n \in X$, dann gilt $n-1 \notin X$ und $n-2 \notin X$. Sei $Y = X \cap [n-3]$, dann gilt $X = \{n\} \cup Y$ und $Y \in \mathcal{X}_{n-3}$. Umgekehrt gilt: Für alle $Y \in \mathcal{X}_{n-3}$ ist $(\{n\} \cup Y) \in \mathcal{X}_n$. Falls $n \notin X$, dann ist $X \in \mathcal{X}_{n-1}$. Daraus ergibt sich eine Bijektion zwischen \mathcal{X}_n und $\mathcal{X}_{n-1} \cup \mathcal{X}_{n-3}$. Dies ergibt die Rekursion $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, bzw. äquivalent $a_n - a_{n-1} - a_{n-3} = 0$.
- Dank des Satzes über lineare Rekursionen ergibt sich: $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \frac{P(z)}{1-z-z^3}$, wobei P ein Polynom vom Grad höchstens 2 ist. Um P zu bestimmen, berechnen wir $A(z)$ im Detail (direktes Zählen ergibt $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$):

$$\begin{aligned} A(z) &= 1 + 2z + 4z^2 + \sum_{n \geq 3} (a_{n-1} + a_{n-3})z^n \\ &= 1 + 2z + 4z^2 + z \sum_{n \geq 3} a_{n-1}z^{n-1} + z^3 \sum_{n \geq 3} a_{n-3}z^{n-3} \\ &= 1 + 2z + 4z^2 + z(A(z) - 1 - 2z) + z^3 A(z) \\ &= 1 + 2z + 4z^2 + z(A(z) - 1 - 2z) + z^3 A(z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A(z) = \frac{1 + z + 2z^2}{1 - z - z^3}$$

- Die Ableitung von $x \mapsto 1 - x - x^3$ ist $x \mapsto -1 - 3x^2$, was für alle $x \in \mathbb{R}$ negativ ist. Daher ist $x \mapsto 1 - x - x^3$ streng monoton fallend auf \mathbb{R} . Da dieses Polynom gegen $+\infty$ strebt für $x \rightarrow -\infty$ und gegen $-\infty$ für $x \rightarrow +\infty$, schneidet es die x -Achse genau einmal: das Polynom $1 - x - x^3$ hat genau eine reelle Nullstelle.
- Für $x = 0$ ist $1 - x - x^3 = 1 > 0$, und für $x = 1$ ist $1 - x - x^3 = -1 < 0$, also liegt gemäß der vorherigen Frage die eindeutige reelle Nullstelle von $1 - x - x^3$ zwischen 0 und 1. Nun erinnern wir uns daran, dass $a_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + c_3 \alpha_3^n$ gilt, wobei α_1, α_2 und α_3 die Nullstellen des Polynoms $1 - x - x^3$ sind (und c_1, c_2, c_3 reelle Zahlen). Wenn $|\alpha_1| < 1$ und $|\alpha_2| < 1$ und $|\alpha_3| < 1$, dann würde $a_n \rightarrow 0$ gelten. Da wir jedoch gezeigt haben, dass die reelle Nullstelle von $1 - x - x^3$ Betrag kleiner als 1 hat, und da $a_n \rightarrow +\infty$ (weil es eine Anzahl von Teilmengen zählt, die offensichtlich gegen unendlich geht), muss mindestens eine der komplexen Nullstellen Betrag > 1 haben. Da komplexe Nullstellen konjugiert auftreten, haben beide Betrag > 1 .

Aufgabe 2

[Katalytische Variablen und Fontänen]

1. Es gibt 5 solche Fontänen: 1 mit 5 Münzen an der Basis, 3 mit 4 Münzen an der Basis (und 1 Münze in der zweiten Reihe), 1 mit 3 Münzen an der Basis (und 2 Münzen in der zweiten Reihe).
2. Nimm eine Fontäne mit n Münzen, deren Basis k Münzen hat und deren zweite Reihe $k - 1$ Münzen hat, und entferne die Basis: Du erhältst eine Fontäne mit $n - k$ Münzen, deren Basis $k - 1$ Münzen hat (es ist tatsächlich eine Fontäne, da in der zweiten Reihe der Ausgangsfontäne keine Münze fehlt). Das definiert eine Bijektion zwischen (n, k) -Fontänen mit kompletter zweiter Reihe und $(n - k, k - 1)$ -Fontänen. Also gilt $g_{n,k} = f_{n-k,k-1}$. Schreibt man die erzeugenden Funktionen, so erhält man (mit $j = k - 1$ und $m = n - k = n - j - 1$):

$$G(x, t) = \sum_{n,k} f_{n-k,k-1} x^n t^k = \sum_{m,j} f_{m,j} x^{m+j+1} t^{j+1} = xtF(x, xt)$$

3. Fixiere eine (n, k) -Fontäne A . Betrachte die erste fehlende Münze in der zweiten Reihe von A , sagen wir die r^{te} (für ein beliebiges $r \in [k]$): Man kann A in einen linken und einen rechten Teil zerlegen. Der linke Teil besteht aus einer Basis von r Münzen zusammen mit allen Münzen, die über den r linkesten in der Basis von A liegen. Der rechte Teil besteht aus einer Basis von $n - r$ Münzen zusammen mit allen Münzen, die über den $n - r$ rechteren in der Basis von A liegen. Da es die r^{te} Münze in der zweiten Reihe von A nicht gibt, sind linke und rechter Teil disjunkt (und deren Vereinigung ist A). Das definiert eine Bijektion von nicht-leeren (n, k) -Fontänen auf Paare von Fontänen (B, B') , wobei B eine Fontäne mit kompletter zweiter Reihe ist, die Summe der Münzanzahlen von B und B' gleich n und die Summe der Basenlängen von B und B' gleich k ist. Somit gilt auf der Ebene der erzeugenden Funktionen (das $+1$ steht für die leere Fontäne mit 0 Münzen):

$$F(x, t) = F(x, t) \cdot G(x, t) + 1$$

4. Umschreiben der letzten beiden Gleichungen ergibt:

$$F(x, t) = \frac{1}{1 - x \cdot t \cdot F(x, xt)} = \frac{1}{1 - xt \cdot \frac{1}{1 - xt \cdot F(x, xxt)}} = \dots$$

Setzt man $F(x, x^k t)$ iterativ ein, erhält man den gewünschten Ausdruck. Außerdem gilt: $F(x) = \sum_n f_n x^n = \sum_n (\sum_k f_{n,k} \cdot 1^k) x^n = F(x, 1)$. Dies liefert die korrekte Formel.

5. Für jede (n, k) -Fontäne verbindet man die Mittelpunkte der obersten Münzen, wodurch ein Dyck-Pfad (Zeichnung machen) der Länge $2k$ entsteht. Dies definiert eine Bijektion (man sollte auch die Umkehrung prüfen) zwischen Fontänen mit Basis k und Dyck-Pfaden. Daher ist die Anzahl der Fontänen mit Basis k die k^{te} Catalan-Zahl. Insbesondere zeigt die gegebene Abbildung den Fall $k = 4$, und es gibt tatsächlich $\text{Catalan}(4) = 14$ Fontänen mit Basis 4.

Außerdem gilt $c_k = \sum_n f_{n,k}$, daher ist $F(1, t)$ die erzeugende Funktion der c_k . Da c_k die Catalan-Zahlen sind, erhält man $F(1, t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$. Der linke Ausdruck aus 4. liefert außerdem $F(1, t) = \frac{1}{1-\frac{t}{1-\frac{t}{\dots}}}$.

Aufgabe 3

[Motzkin-Wege]

- Es gibt 2 Wege der Länge 2, 4 Wege der Länge 3 und 9 Wege der Länge 4, dargestellt in Figure 21.
- Wenn $y_1 = 0$ ist, dann ist der Weg $((0, y_1), (1, y_2), \dots, (n-1, y_n))$ wieder ein Motzkin-Weg (entstanden durch Verschiebung des ursprünglichen Motzkin-Weges nach links), da dieselben Schritte verwendet werden. Umgekehrt ergibt sich durch Verschieben eines Motzkin-Weges der Länge $n-1$ um $(+1, 0)$ und Anhängen des Punkts $(0, 0)$ ein Motzkin-Weg der Länge n mit $y_1 = 0$.
Da diese beiden Konstruktionen zueinander invers sind, beschreibt dies die gewünschte Bijektion.
- Fixiere einen Motzkin-Weg \mathcal{P} der Länge n . Sei i_o der kleinste Index mit $y_{i_o} = 0$ und $\mathcal{Q}_o, \mathcal{Q}'$ die Teilwege von \mathcal{P} von 0 bis i_o bzw. von i_o bis n . Da $y_1 > 0$ gilt, ist $i_o > 1$ und \mathcal{Q}_o beginnt mit dem Schritt $(+1, +1)$. Außerdem endet \mathcal{Q}_o wegen der Minimalität von i_o mit dem Schritt $(+1, -1)$. Nimmt man den Teilweg \mathcal{Q} von \mathcal{Q}_o von 1 bis $i_o - 1$ und verschiebt ihn um $(0, -1)$, so erhält man einen Motzkin-Weg, sodass die Summen der Längen von \mathcal{Q} und \mathcal{Q}' gleich $n-2$ sind.
Umgekehrt kann man aus zwei Motzkin-Wegen, deren Längen $n-2$ ergeben, einen Motzkin-Weg der Länge n konstruieren, indem man zu Beginn von \mathcal{Q} den Schritt $(+1, +1)$ und am Ende den Schritt $(+1, -1)$ anhängt und den so entstehenden Weg an \mathcal{Q}' anfügt.
Da diese Konstruktionen invers sind, beschreibt dies die gewünschte Bijektion.
- Ein Motzkin-Weg der Länge n ist entweder der leere Weg, oder ein Motzkin-Weg mit $y_1 = 0$, oder ein Motzkin-Weg mit $y_1 > 0$. Aus den beiden vorherigen Fragen folgt, dass (bis auf Bijektion) ein Motzkin-Weg der Länge n entweder der leere Weg ist, oder ein Motzkin-Weg der Länge $n-1$, oder ein Paar von Motzkin-Wegen, deren Längen $n-2$ ergeben. Daher gilt für die Anzahl m_n der Motzkin-Wege: $m_0 = 1$ und für $n \geq 1$ gilt $m_n = m_{n-1} + \sum_{i+j=n-2} m_i m_j$. Summiert man über alle n , so ergibt sich:

$$M(z) = 1 + zM(z) + z^2M(z)^2$$

- Umschreiben ergibt die quadratische Gleichung (in der Variable $M(z)$):

$$z^2M(z)^2 + (z-1)M(z) + 1 = 0$$

Die Diskriminante ist $\Delta(z) = (z-1)^2 - 4z^2 = -3z^2 - 2z + 1$. Die Lösungen sind

$$M(z) = \frac{-(z-1) \pm \sqrt{\Delta(z)}}{2z^2}.$$

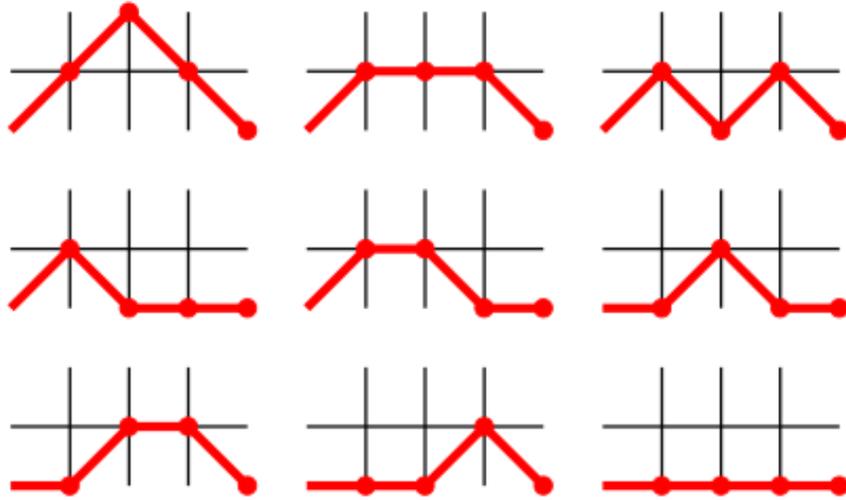


Abbildung 21: Motzkin-Wege der Länge 4

Für $z = 0$ gilt $M(0) = m_0 = 1$. Damit der Bruch konvergiert, muss der Zähler für $z \rightarrow 0$ gegen 0 gehen. Deshalb ist

$$M(z) = \frac{-(z-1) - \sqrt{\Delta(z)}}{2z^2},$$

was die gewünschte Formel ist.

Aufgabe 4

[Nicht selbst überschneidenden Wege]

- (i) a_1 zählt Wege mit genau einem Schritt. Davon gibt es gerade 3 Stück (N, E, W). Für die Rekursion unterscheiden wir verschiedene Wegtypen von Wegen der Länge n .

Typ 1: Wege, die mit N beginnen. In diesem Fall ist der Restweg ein beliebiger Weg der Länge $n-1$, der die angegebenen Bedingungen erfüllt. Von diesen gibt es a_{n-1} viele.

Typ 2: Wege, die mit EN , EE oder WW beginnen. Diese sind in Bijektion zu Wegen der Länge $n-1$. Denn einerseits erhält man durch verkürzen eines Weges der Länge n einen Weg der Länge $n-1$ und diese sind nach Konstruktion alle verschieden und andererseits kann ein Weg der Länge $n-1$ eindeutig zu einem Weg des angegebenen Typs ergänzt werden. Es gibt also a_{n-1} solcher Wege.

Typ 3: Wege, die mit WN beginnen. In diesem Fall ist der Restweg ein Weg der Länge $n-2$, der die angegebenen Bedingungen erfüllt. Es gibt von diesen a_{n-2} viele.

Insgesamt folgt die geforderte Rekursion.

(ii) Die Rekursion lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + a_{n-2} && \text{für } n \geq 2 \\ \Leftrightarrow a_{n+2} &= 2a_{n+1} + a_n && \text{für } n \geq 0 \\ \Leftrightarrow a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n &= 0 && \text{für } n \geq 0. \end{aligned}$$

Wegen Satz 11.18 (i) besitzt a_n eine rationale erzeugende Funktion $f_a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit $Q(z) = 1 - 2z - z^2$ und $P(z)$ ist ein Polynom vom Grad kleiner als 2. Es ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} P(z) &= (a_0 + a_1 z + \text{höhere Terme}) (1 - 2z - z^2) \\ &= a_0 + (-2a_0 + a_1)z \\ &= 1 + (-2 + 3)z \\ &= 1 + z. \end{aligned}$$

(iii) Wegen Satz 11.18 (iii) besitzt a_n eine explizite Darstellung der Form

$$a_n = \sum_{i=1}^k P_i(n) \gamma_i^n.$$

Wir bestimmen zunächst die γ_i für $i = 1, \dots, k$. Dazu berechnen wir zunächst die Nullstellen von $Q(z)$ mit der pq-Formel

$$z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1^2 + 1} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Die γ_i 's sind die Kehrwerte der Nullstellen von $Q(z)$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{-1 + \sqrt{2}} = \frac{1}{-1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} + 1 \\ \gamma_2 &= \frac{1}{-1 - \sqrt{2}} = \frac{1}{-1 - \sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{2} + 1}{-\sqrt{2} + 1} = 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Alternative: Das reziproke Polynom

$$Q^R(z) = z^2 Q\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 - 2z - 1$$

besitzt die Nullstellen $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$. Die Nullstellen von $Q^R(z)$ entsprechen gerade den γ_i 's, denn es gilt

$$Q(z) = z^2 Q^R\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 \left(\frac{1}{z} - (1 + \sqrt{2})\right) \left(\frac{1}{z} - (1 - \sqrt{2})\right) = (1 - (1 + \sqrt{2})z)(1 - (1 - \sqrt{2})z).$$

Es folgt $\gamma_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\gamma_2 = 1 - \sqrt{2}$ und

$$a_n = P_1(n)(1 + \sqrt{2})^n + P_2(n)(1 - \sqrt{2})^n,$$

wobei $P_1(n)$ und $P_2(n)$ Polynome vom Grad kleiner 1 sind, d.h. es gibt Konstanten $A, B \in \mathbb{C}$, sodass

$$a_n = A(1 + \sqrt{2})^n + B(1 - \sqrt{2})^n$$

Wir setzen die Anfangswerte der Folge ein und erhalten das LGS

$$\begin{aligned} 1 &= a_0 = A + B \\ 3 &= a_1 = A(1 + \sqrt{2}) + B(1 - \sqrt{2}), \end{aligned}$$

woraus weiter folgt $B = 1 - A$ und

$$3 = A(1 + \sqrt{2}) + (1 - A)(1 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}A + 1 - \sqrt{2},$$

d.h. $A = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ und $B = 1 - \frac{\sqrt{2}+1}{2} = \frac{2-\sqrt{2}-1}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$. Daraus ergibt sich die explizite Darstellung

$$a_n = \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right) (1 + \sqrt{2})^n + \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right) (1 - \sqrt{2})^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (iv) Falls sich die Wege überschneiden lassen, hat man für jeden Schritt 3 Möglichkeiten, sodass sich 3^n als Anzahl ergibt.

Aufgabe 5

[Bonus – Dezimalentwicklung]

Es klingt magisch, ist aber leider nicht so.

Sei C_n die n^{te} Catalan-Zahl. Eine Zahl, deren Dezimalentwicklung sich in Dreierblöcke aufteilen lässt, welche die ersten 7 Catalan-Zahlen enthalten, ist:

$$\frac{1}{1000}C_0 + \frac{1}{1000^2}C_1 + \frac{1}{1000^3}C_2 + \cdots + \frac{1}{1000^7}C_6.$$

Betrachten wir also die Reihe $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1000^{n+1}} C_n = \frac{1}{1000} \sum_{n \geq 0} C_n \left(\frac{1}{1000}\right)^n$. Diese ist die Auswertung von $z \cdot C(z)$ bei $z = \frac{1}{1000}$, wobei $C(z)$ die erzeugende Funktion der Catalan-Zahlen ist. Aus dem Kurs kennt man: $C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$, daher gilt:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1000^{n+1}} C_n = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{1000}}.$$

Umgekehrt haben wir gerade gezeigt, dass die Dezimalentwicklung der reellen Zahl

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{1000}} \quad (\text{also } 0,5 - \sqrt{0,249})$$

die Catalan-Zahlen in 3-stelligen Blöcken anzeigt, zusammen mit einigen unordentlichen Ziffern nach der $3 \cdot 7 = 21$ -ten Stelle nach dem Komma. Dieser

Darstellungs-Trick funktioniert für jede Catalan-Zahl mit höchstens 3 Ziffern, außer wenn eine größere (4-stellige) Catalan-Zahl einen Übertrag erzeugt: Das passiert nur bei der größten 3-stelligen Catalan-Zahl, nämlich 429, die so nicht korrekt dargestellt wird.

Natürlich zeigt ein Austausch von $\frac{1}{1000}$ durch $\frac{1}{10^k}$ die Catalan-Zahlen in Blöcken von k Ziffern in der Dezimalentwicklung von

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{10^k}} = 0,5 - \sqrt{0,2499\dots 9}$$

wobei die 9 genau $k - 2$ -mal vorkommt.

Ich lade dich ein, deine Freunde mit anderen Dezimalentwicklungen zu überraschen: Es wirkt beim ersten Blick immer sehr mystisch!

Diskrete Mathematik – Sommersemester 2025

Übungsblatt 12

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden. Die Bonusübung kann bis zu +5 Bonuspunkte geben (daher sollte man sie nicht zu seiner Priorität machen).

Aufgabe 1 [Exponential erzeugende Funktionen]

Erinnere dich: Die exponential erzeugende Funktion zu einer Zahlenfolge $(a_n)_{n \geq 0}$ ist gegeben durch $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}$.

1. Zeige, dass $A'(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \frac{z^n}{n!}$ gilt, wobei A' die übliche Ableitung von A (nach z) bezeichnet.
2. Gib die exponential erzeugende Funktion der Anzahl der Permutationen an.
3. Sei a_n die Anzahl der Permutationen in S_n , deren Quadrat die Identität ist, d. h. $\sigma(\sigma(i)) = i$ für alle $i \in [n]$.
Zeige kombinatorisch: $a_{n+1} = a_n + na_{n-1}$.
4. Fixiere $\alpha, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, und leite $x \mapsto \alpha e^{\lambda x^2 + \mu x}$ ab.
Finde anschließend eine explizite Formel für die exponential erzeugende Funktion von $(a_n)_{n \geq 0}$ (du darfst $a_0 = 1$ annehmen).

Aufgabe 2 [Rencontres-Zahlen]

Ein *Fixpunkt* einer Permutation $\sigma \in S_n$ ist ein Index $j \in [n]$, für den $\sigma(j) = j$ gilt.

Sei $D_{n,k}$ die Anzahl der Permutationen $\sigma \in S_n$ mit genau k Fixpunkten (genannt *Rencontres-Zahl*); definiere die erzeugende Funktion $D(z, u) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} D_{n,k} u^k \frac{z^n}{n!}$.

1. Zeige, dass $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$ gilt.
2. Erinnere dich an die Vorlesung (oder beweise es erneut):
 $\frac{1}{n!} D_{n,0} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$.
Folgere daraus: $\sum_{n \geq 0} D_{n,0} \frac{z^n}{n!} = \frac{e^{-z}}{1-z}$ und $D(z, u) = \frac{e^{(u-1)z}}{1-z}$.
3. Du hast eine Prüfung organisiert, bist aber zu faul zum Korrigieren. Also gibst du die Prüfungsblätter zufällig zurück und bittest jede Person, das erhaltene Blatt zu korrigieren.
Angenommen, du hast sehr viele Studierende – schätze die Wahrscheinlichkeit, dass niemand sein eigenes Blatt zurückerhalten hat.
4. Bestimme mithilfe eines Doppeltzählarguments den Erwartungswert der Anzahl von Fixpunkten in einer zufälligen Permutation auf n Elementen.

- Aufgabe 3** [Konjugation von Permutationen]
 Das *Inverse* einer Permutation $\sigma \in \mathbf{S}_n$ ist die Permutation, bezeichnet als σ^{-1} , so dass $\sigma(\sigma^{-1}(i)) = \sigma^{-1}(\sigma(i)) = i$ für alle i .
1. Für $\sigma, \tau \in \mathbf{S}_n$, zeigen Sie, dass σ und $\tau\sigma\tau^{-1}$ denselben Typ haben.
 2. Zeigen Sie, dass σ und σ^{-1} denselben Typ haben.
 3. Schließen Sie daraus, dass für alle $\sigma \in \mathbf{S}_n$ ein $\tau \in \mathbf{S}_n$ existiert, so dass $\sigma^{-1} = \tau\sigma\tau^{-1}$.

- Aufgabe 4** [Bruhat-Graph und Steinhaus–Johnson–Trotter-Algorithmus]
 Der Bruhat-Graph Γ_n auf Permutationen ist wie folgt definiert: Die Knoten sind die Permutationen $\sigma \in \mathbf{S}_n$, und es gibt eine Kante zwischen σ und σ' , wenn und nur wenn es eine Transposition³ $\tau = (i \ i+1)$ mit $i \leq n-1$ gibt, so dass $\sigma = \sigma'\tau$.
1. Zeichnen Sie Γ_2, Γ_3 .
 2. Wie viele Knoten hat Γ_n ? Wie viele Kanten? Zeigen Sie, dass Γ_n regulär ist. Welchen Grad hat er?
 3. Für welche n ist Γ_n eulerianisch?
 4. Der Steinhaus–Johnson–Trotter-Algorithmus funktioniert wie folgt: Beginnen Sie mit der Identitätspermutation $(1 \ 2 \ \dots \ n)$. Nun finden und transponieren Sie die größtmögliche Zahl, die nach links oder rechts transponiert werden kann, so dass in jedem Schritt eine neue Permutation entsteht, die in der Liste der Permutationen zuvor nicht aufgetreten ist. Zeigen Sie, dass der Steinhaus–Johnson–Trotter-Algorithmus **alle** Permutationen von \mathbf{S}_n aufzählt und folgern Sie daraus, dass Γ_n Hamiltonian ist.

- Aufgabe 5** [Bonus – Futuramas Theorem]
 Im 10^{ten} Episode der sechsten Staffel von Futurama erfindet Prof. Farnsworth eine Maschine, die es ermöglicht, zwei Geister zwischen zwei Körpern zu tauschen. So landet Amys Geist im Körper von Farnsworth und umgekehrt. Das erste Problem ist, dass, wenn ein Tausch vorgenommen wird, es unmöglich ist, ihn rückgängig zu machen (Farnsworth und Amy können ihre Geister nicht mehr zurücktauschen). Das zweite Problem ist, dass sehr schnell alle Charaktere der Serie die Maschine benutzen: zuerst wird Amys Körper mit Farnsworths Körper getauscht, dann Benders Körper mit Amys Körper, Farnsworths Körper mit Benders Körper, Leela mit Farnsworth, Amy mit dem Roboter-Eimer, Fry mit Zoidberg, Nikolaï mit dem Roboter-Eimer, Hermes mit Leela (Figure 22).

Etwas zehn Geister sind auf ebenso viele Körper verteilt... Wie kann man das lösen?

Die Lösung wird von den beiden Mathematiker-Basketballspielern Sweet Clyde und Bubblegum Tate erklärt: Durch das Hinzufügen von nur zwei Personen ist es möglich, alle Geister in ihre ursprünglichen Körper zurückzubringen, unabhängig von der Anzahl der vorgenommenen Tauschvorgänge.

Der Satz zeigt, dass, wenn die Körper und Geister von k Personen durcheinander gebracht sind, es nur 2 zusätzliche Personen und höchstens $k + 3$ Tauschvorgänge erfordert, um jeden in seinen ursprünglichen Zustand zurückzubringen.

³Eine Transposition ist ein Zyklus der Länge 2.



Abbildung 22: Der Geist der Person oben (im rosa Bereich) befindet sich nun im Körper der Person unten. Auf dieser Abbildung sind die ersten 3 Tauschvorgänge nicht dargestellt.

Beweisen Sie diesen Satz und zeigen Sie, dass im Kontext der Serie das Problem in 9 Tauschvorgängen gelöst werden kann, ohne das Eingreifen zusätzlicher Personen.

Es handelt sich tatsächlich um den Beweis eines neuen Satzes in der Gruppentheorie. Vollständig ausgearbeitet. In einer TV-Serie.

Abgabe: 16.07.2025 vor 23:59

Tutorium zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 6

[Mit ChatGPT]

Discrete Mathematics – Loesungblatt 12

Aufgabe 1

[Exponential erzeugende Funktionen]

1. Wir haben

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!} \right)' = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \frac{z^n}{n!}.$$

2. Es gibt $n!$ Permutationen in S_n , daher ist die zugehörige exponential erzeugende Funktion

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{n!} z^n = \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

3. Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation, deren Quadrat die Identität ist. Wir unterscheiden den Fall, ob $\sigma(n) = n$ oder nicht. Ist $\sigma(n) = n$, so sei $\sigma' \in S_{n-1}$ definiert durch $\sigma'(i) = \sigma(i)$ für $i \in [n-1]$; das Quadrat von σ' ist genau dann die Identität, wenn das Quadrat von σ die Identität ist. Ist $\sigma(n) = k < n$, so betrachte σ'' als Permutation von $[n] \setminus \{n, k\}$ definiert durch $\sigma''(i) = \sigma(i)$ für $i \notin \{k, n\}$; das Quadrat von σ'' ist genau dann die Identität, wenn das Quadrat von σ die Identität ist. Folglich gibt es eine Bijektion zwischen

$$\{\sigma \in S_n ; \sigma^2 = \text{id}\}$$

und

$$\{\tau \in S_{n-1} ; \tau^2 = \text{id}\} \cup \{(\gamma, k) \in S_{n-2} \times [n-1] ; \gamma^2 = \text{id}\}.$$

Wir folgern $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$. Ein einfacher Indexwechsel liefert die gewünschte Formel.

4. Vorsicht, dies ist keine lineare Rekurrenz: einige Koeffizienten hängen von n ab. Dennoch übertragen wir die obige Formel auf exponential erzeugende Funktionen und erhalten:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \frac{z^n}{n!} &= \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!} + \sum_{n \geq 0} a_{n-1} \frac{z^n}{(n-1)!} \\ A'(z) &= A(z) + z \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!} \\ A'(z) &= A(z) + zA(z) \end{aligned}$$

Folglich gilt $A'(z) = (1+z)A(z)$. Zur Lösung dieser Differentialgleichung kennt man entweder die Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung oder nutzt folgenden Tipp: Setze $f(x) = \alpha e^{\lambda x^2 + \mu x}$, dann ist

$$f'(x) = \alpha(2\lambda x + \mu)e^{\lambda x^2 + \mu x} = (2\lambda x + \mu)f(x).$$

Insbesondere für $\lambda = \frac{1}{2}$ und $\mu = 1$ sowie beliebiges α erhält man dieselbe Gleichung wie für A . Damit gilt

$$A(z) = \alpha e^{\frac{1}{2}z^2 + z}$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Um α zu bestimmen, wertet man aus:

$$A(0) = a_0 = 1, \quad \text{und} \quad A(0) = \alpha e^0 = \alpha.$$

Also ist $\alpha = 1$.
Schließlich gilt:

$$A(z) = e^{\frac{1}{2}z^2 + z}.$$

Aufgabe 2

[Rencontres-Zahlen]

1. Es gibt eine Bijektion zwischen Permutationen $\sigma \in S_n$ mit genau k Fixpunkten und Paaren (X, τ) , wobei $X \in \binom{[n]}{k}$ und $\tau \in S_{n-k}$ eine Permutation ohne Fixpunkte ist: Nämlich sei X die Menge der Fixpunkte von σ , und τ die von σ induzierte Permutation auf $[n] \setminus X$ (bitte konstruieren Sie die Umkehrabbildung). Folglich gilt:

$$D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n,0}.$$

2. Der Beweis beruht auf der offensichtlichen Tatsache, dass $\sum_k D_{n,k} = n!$ gilt, da $\sum_k D_{n,k}$ die Anzahl der Permutationen mit beliebiger Anzahl von Fixpunkten zählt. Erinnerung: $\sum_{n \geq m} z^n = \frac{z^m}{1-z}$ gilt. Wir erhalten:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{D_{n,0}}{n!} z^n = \sum_{n \geq k \geq 0} \frac{(-1)^k z^n}{k!} = \frac{1}{1-z} \sum_{k \geq 0} \frac{(-z)^k}{k!} = \frac{e^{-z}}{1-z}.$$

Folglich (die letzte Umformung erfolgt durch $p = n - k$):

$$\begin{aligned} e^{uz} \cdot \frac{e^{-z}}{1-z} &= \left(\sum_{k \geq 0} u^k \frac{z^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{p \geq 0} D_{p,0} \frac{z^p}{p!} \right) \\ &= \sum_{p,k \geq 0} D_{p,0} \frac{1}{k!p!} u^k z^{k+p} \\ &= \sum_{n,k \geq 0} D_{n-k,0} \frac{n!}{k!(n-k)!} u^k \frac{z^n}{n!}. \end{aligned}$$

Da $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ gilt, erhalten wir

$$D(z, u) = \frac{e^{(u-1)z}}{1-z}.$$

3. Wenn man die Klausurzetteln an die Studierenden zurückgibt, permutiert man die n Zettel. Ein Studierender erhält genau dann seinen eigenen Zettel, wenn er ein Fixpunkt der Permutation ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass kein Studierender seinen eigenen Zettel erhält, ist somit die Anzahl der

Permutationen ohne Fixpunkte, also $D_{n,0}$, geteilt durch die Gesamtanzahl der Permutationen $n!$. Folglich interessiert uns der Grenzwert

$$\frac{D_{n,0}}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Da $e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ gilt, folgt

$$\frac{D_{n,0}}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \approx 0,368.$$

Die Chance, dass kein Studierender seinen eigenen Zettel bekommt, liegt also bei etwas mehr als 1 zu 3.

4. Sei $f(\sigma)$ die Anzahl der Fixpunkte einer Permutation $\sigma \in S_n$. Wir wollen

$$m = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma)$$

berechnen. Zählen wir die Menge

$$\{(\sigma, x) ; \sigma \in S_n, x \in [n], \sigma(x) = x\}$$

doppelt.

Einerseits gilt

$$\sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\substack{x \in [n] \\ \sigma(x) = x}} 1 = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = m \cdot n!.$$

Andererseits ist für festes $x \in [n]$ die Anzahl der Permutationen $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(x) = x$ gleich $(n-1)!$, da eine solche Permutation nur eine Permutation von $[n] \setminus \{x\}$ ist. Also gilt

$$\sum_{x \in [n]} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(x) = x}} 1 = \sum_{x \in [n]} (n-1)! = n!.$$

Daher folgt

$$m = 1.$$

Aufgabe 3

[Konjugation von Permutationen]

Seien $\sigma, \tau \in \mathbf{S}_n$, wobei τ eine Transposition ist. Wir interessieren uns für den Zyklentyp von $s = \sigma\tau\sigma^{-1}$. Schreiben wir $\tau = (ab)$. Wenn $x \neq \sigma(a), \sigma(b)$, dann ist $s(x) = x$ und $s(\sigma(a)) = \sigma(b)$ und $s(\sigma(b)) = \sigma(a)$, daher $s = (\sigma(a)\sigma(b))$. Tatsächlich kann für jede Permutation $\gamma \in \mathbf{S}_n$ γ als Produkt von Transpositionen⁴ geschrieben werden $\gamma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_k$, und betrachten $s = \sigma\gamma\sigma^{-1}$:

$$s = \sigma\tau_1 \dots \tau_k\sigma^{-1} = (\sigma\tau_1\sigma^{-1})(\sigma\tau_2\sigma^{-1}) \dots (\sigma\tau_k\sigma^{-1})$$

⁴Dies funktioniert auch mit der Zerlegung in Zyklen.

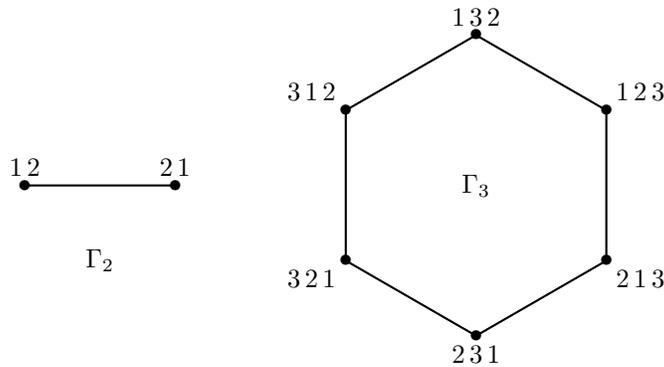
Indem wir alle $[1, n]$, die in der Zyklenzerlegung von γ erscheinen, durch $[\sigma(1), \sigma(n)]$ ersetzen, erhalten wir die Zyklenzerlegung von $\sigma\gamma\sigma^{-1}$. Somit wurde der Zyklentyp von γ durch die Konjugation nicht verändert.

Das Inverse eines p -Zyklus ist ebenfalls ein p -Zyklus (es ist derselbe Zyklus in umgekehrter Reihenfolge), also indem wir γ in ein Produkt disjunkter Zyklen zerlegen und dann jeden dieser Zyklen invertieren, erhalten wir in der Tat γ^{-1} mit demselben Zyklentyp.

Tatsächlich haben wir etwas viel Mächtigeres gezeigt: Wir haben gezeigt, dass zwei Permutationen mit demselben Zyklentyp konjugiert sind. Seien γ, γ' , zwei Permutationen mit demselben Zyklentyp, wir schreiben sie als Produkt von Zyklen $\pi_1\pi_2 \dots \pi_k$ und $\pi'_1\pi'_2 \dots \pi'_k$, wir definieren die Permutation σ , die $\pi_1 \pi'_1$ zuordnet, usw. („zuordnen“ bedeutet, dass wenn $\pi_1 = (a_1 a_2 \dots a_p)$ und $\pi'_1 = (b_1 b_2 \dots b_p)$, dann $\sigma(a_i) = b_i$). Einmal gemacht, haben wir $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma'$.

Insbesondere hat σ^{-1} denselben Zyklentyp wie σ , daher sind sie konjugiert. Dies ist eine ziemlich eigenartige Eigenschaft und ist nicht in jeder Gruppe wahr (zum Beispiel ist es in einer zyklischen Gruppe oder einer kommutativen Gruppe falsch).

Aufgabe 4 [Bruhat graph und Steinhaus–Johnson–Trotter-Algorithmus]



1. Siehe Abbildung.
2. Γ_n hat $n!$ Ecken. Jede Ecke hat den Grad $n - 1$, da es $n - 1$ Transpositionen der Form $(i \ i+1)$ mit $i \leq n - 1$ gibt. Daher ist Γ_n regulär und die Gradformel ergibt, dass Γ_n $\frac{(n-1) \times n!}{2}$ Kanten hat.
3. Für ungerades n haben alle Ecken von Γ_n den Grad $n - 1$, welcher gerade ist, daher ist Γ_n eulerianisch. Für gerades n trifft das Gegenteil zu.
4. Wir werden durch Induktion vorgehen. Für $n = 2$ beginnt der Steinhaus–Johnson–Trotter-Algorithmus bei 12. Die größte Zahl, die transponiert

werden kann (nach links oder rechts), ist 2, und wir erhalten 21, wobei die größte Zahl, die transponiert werden kann, erneut 2 ist, und wir kehren zurück zu 12. Wir empfehlen dem Leser, den Algorithmus für $n = 3$ durchzuführen.

Angenommen, der Algorithmus funktioniert für n (d.h. er zählt alle Permutationen von \mathbf{S}_n auf, wenn er mit $(1\ 2\ \dots\ n)$ beginnt), wir werden zeigen, dass er für $n + 1$ funktioniert. Per Definition listet der Algorithmus nur verschiedene Permutationen auf, daher müssen wir zeigen, dass er sie alle auflistet: wir können entweder eine Permutation fixieren und beweisen, dass sie vom Algorithmus aufgelistet wird, oder die Anzahl der insgesamt aufgelisteten Permutationen zählen und zeigen, dass es $(n + 1)!$ sind. Wir zeigen Letzteres.

Machen Sie einen Schritt im Algorithmus für $n + 1$ und nehmen Sie an, dass $n + 1$ nicht transponiert werden kann. Dann ist dieser Schritt nur eine Transposition von $i \leq n$ mit $j \leq n$, das heißt, es ist ein Schritt, den der Algorithmus für n macht. Beginnen wir nun bei $1\ 2\ \dots\ n\ n+1$ und führen den Algorithmus aus. Während der ersten n Schritte wird die Zahl $n + 1$ nach links transponiert, bis wir $n+1\ 1\ 2\ \dots\ n$ erhalten. Zu diesem Zeitpunkt kann $n + 1$ nicht transponiert werden, sodass 1 Schritt des Algorithmus für n durchgeführt wird. Dann wird $n + 1$ nach rechts transponiert, bis es die äußerste Position erreicht; dann wird 1 Schritt des Algorithmus für n durchgeführt; dann wird $n + 1$ wieder nach links transponiert, bis es die äußerste linke Position erreicht; und so weiter.

Folglich werden alle Schritte des Algorithmus für n durchgeführt, und es werden dazwischen n Schritte durchgeführt. Insgesamt gibt es für jede Permutation, die vom Algorithmus für n erzeugt wird, $n + 1$ Permutationen, die vom Algorithmus für $n + 1$ erzeugt werden. Dies ergibt insgesamt $(n+1)!$ verschiedene Permutationen, die vom Algorithmus für $n+1$ erzeugt werden: alle Permutationen werden aufgelistet.

Zudem unterscheiden sich zwei aufeinanderfolgende Permutationen in der vom Algorithmus angegebenen Aufzählung genau dann, wenn sie sich durch eine Transposition unterscheiden, sodass die Aufzählung der Permutationen, die der Algorithmus für n angibt, ein Hamiltonscher Zyklus (es kehrt zum Anfang zurück, nachdem alle Permutationen besucht wurden) des Graphen Γ_n ist.

Aufgabe 5

[Bonus – Futurama’s Theorem]

Die Lösung ist hier:

<https://www.youtube.com/watch?v=J65GNFfL94c>